

Witold Bołt

Grafy stochastyczne i sieci złożone

29 stycznia 2007

Wstęp i ostrzeżenie

Opracowanie to powstało w oparciu o notatki do wykładu Układy Złożone prowadzonego przez prof. dr hab. Danutę Makowiec na Wydziale Matematyki, Fizyki i Informatyki w roku akademickim 2006/2007 dla studentów fizyki, informatyki i matematyki. Jako opracowanie studenckie, może ono zawierać poważne błędy merytoryczne. Innymi słowy, nikt nie gwarantuje poprawności tych materiałów (a w szczególności nie odpowiada za nie wykładowca). Wszelkie znalezione pomyłki proszę zgłaszać na adres: ja@hope.art.pl.

1. Graf stochastyczny

Omówimy tutaj pokrótce tradycyjną definicję i własności tzw. grafów stochastycznych. W tradycyjnym modelu Erdős-Rényi dla grafów stochastycznych przyjmuje się definicję:

Definicja 1 (graf stochastyczny wg. Erdős-Rényi). Graf stochastyczny $G_{N,n}$ to graf o N wierzchołkach i n krawędziach pomiędzy wybranymi losowo parami wierzchołków.

Ze względów praktycznych, w dalszej części tego opracowania przyjmujemy współczesną, nieco szerszą wersję tej definicji.

Definicja 2 (graf stochastyczny wg. Gilbert). Graf stochastyczny $G_{N,p}$ to graf o N wierzchołkach, gdzie dla każdej pary wierzchołków v_1, v_2 istnieje krawędź e z prawdopodobieństwem p . Liczba krawędzi w takim grafie, to $\langle n \rangle = \binom{N}{2}p = \frac{1}{2}N(N-2)p$.

Naszym pierwszym celem jest zbadanie zachowań kilku podstawowych własności, znanych z teorii grafów, takich jak stopień wierzchołka, klikowatość, najkrótsze drogi.

1.1. Podstawowe własności

Stopień wierzchołka w grafie nieskierowanym (a o takich tutaj mówimy) to liczba krawędzi, które wychodzą z danego wierzchołka. Dla ustalonego

wierzchołka v_i grafu G , stopień tego wierzchołka będziemy oznaczać przez k_i .

W grafie stochastycznym, badać będziemy średni stopień wierzchołka, oraz dystrybucję stopni wierzchołków.

Niech p i N będą ustalone. Ustalmy również konkretny wierzchołek v_i . Wówczas, gdy bierzemy pod uwagę wszystkie możliwe grafy spełniające definicję grafu stochastycznego dla ustalonych parametrów, to średni stopień wierzchołka i będzie wynosić:

$$\langle k_i \rangle = p(N - 1)$$

Łatwo zauważyć, że wynik będzie taki sam, niezależnie od wyboru wierzchołka. Mówimy więc, że w grafie stochastycznym średni stopień wierzchołka jest stały.

Rozkład stopni wierzchołka przy dużych N jest przybiera formę rozkładu Poisson'a:

$$P(n) \sim \frac{\langle k \rangle^n}{n!}.$$

Średnia długość drogi w grafie. Wybieramy losowo dwa wierzchołki i pytamy się ile wynosi długość najkrótszej drogi między nimi. Doświadczenie powtarzamy. Wartość oczekiwaną (średnią) tych wyników będziemy oznaczać przez $\langle l \rangle$. Można pokazać, że ta średnia długość drogi w grafie stochastycznym jest proporcjonalna do $\ln N^1$.

Klikowatość. Mówiąc potocznie, w pojęciu klikowatości pytamy jakie jest prawdopodobieństwo, że dwaj losowo wybrani „przyjaciele” danego wierzchołka też są przyjaciółmi. W terminach geometrycznych interesuje nas występowanie trójkątów w siatce połączeń. Średnią klikowatość oznaczamy będziemy przez $\langle C \rangle$. W grafie stochastycznym $\langle C \rangle = p^2$

1.2. Zjawiska krytyczne

Przyjrzymy się teraz jak zmieniają się własności grafu stochastycznego w zależności od zmiany parametru p . Nasze obserwacje chcemy uniezależnić od N , dlatego dla ustalonego N wprowadzamy pomocniczą zmienną z tak aby:

$$p \propto N^z.$$

Wszystkie obserwacje i wyniki będziemy wyrażać za pomocą zmiennej z , przyjmując, że wartość $z = -\infty$ odpowiada $p = 0$, a $z = 0$ odpowiada $p = 1$.

W przeprowadzonym doświadczeniu z przyjmuje początkowo wartość $-\infty$ a następnie rośnie do 0. Wzrost z traktujemy jako czas w naszym eksperymencie. Obserwujemy w jaki sposób pojawiają się nowe krawędzie i jak zmienia to charakter grafu.

Zastanówmy się najpierw przy jakiej wartości z pojawi się pierwsza krawędź w grafie. Do zbudowania krawędzi potrzebujemy pary wierzchołków.

¹ Dla porównania, w sieci regularnej mamy: $\langle l \rangle \propto N$.

² Dla porównania w sieci regularnej trójkątnej $\langle C \rangle = 0$.

Parę taką wybieramy na jeden z $\binom{N}{2}$ sposobów. Prawdopodobieństwo, że istnieje krawędź między tak wybraną parą wynosi oczywiście p , mamy stąd:

$$\binom{N}{2}p \approx 1$$

Jedynka w tym wzorze oznacza, że badane zdarzenie zaszło na pewno po raz pierwszy. Zgodnie z przyjętą regułą $p \propto N^z$. Dla dużych N możemy przyjąć też, że $\binom{N}{2} \approx N^2$. W ten sposób otrzymujemy:

$$N^2 N^z \approx 1$$

No a stąd $z = -2$.

To rozumowanie będziemy chcieli uogólnić, aby odpowiedzieć na pytanie – kiedy pojawi się pierwsze drzewo danego stopnia (przyjmujemy, że drzewo stopnia 1, to dwa wierzchołki połączone krawędzią, drzewo stopnia 2, to 3 wierzchołki połączone dwoma krawędziami itd. - nie interesuje nas przy tym jakiś konkretny „kształt” drzewa – tylko fakt, że jest to drzewo). Zastanówmy się więc, kiedy pojawi się pierwsze drzewo stopnia 2. W tym przypadku musimy wybrać trójkę dowolnych wierzchołków, mamy więc $\binom{N}{3}$ możliwości. Potrzebujemy też dwóch krawędzi. Prawdopodobieństwo, że będzie 1 krawędź to p , jeśli więc mają być dwie krawędzie to szansę wynoszą p^2 , otrzymujemy więc:

$$\binom{N}{3}p^2 \approx 1$$

Po analogicznych jak poprzednio przekształceniach ($\binom{N}{3} \approx N^3$), dostajemy: $z = \frac{-3}{2}$.

W ogólnym przypadku, gdy chcemy mieć k wierzchołków i $k - 1$ krawędzi mamy:

$$\binom{N}{k}p^{k-1} \approx 1$$

co daje nam:

$$N^k N^{(k-1)z} \approx 1$$

a stąd:

$$z = \frac{-k}{k-1}$$

Jeśli żądamy, aby w grafie istniało drzewo dowolnego stopnia, musimy znaleźć z dobre dla każdego k , czyli przejść do granicy $k \rightarrow \infty$. Łatwo wyliczyć, że wtedy $z = -1$.

Wniosek 1. *Jeśli $z = -1$, gdzie $p \propto N^z$, to w grafie stochastycznym istnieje³ dowolnie duże⁴ drzewo.*

³ Zarówno w tym zdaniu jak i ogólnie w tym opracowaniu, słowo „istnieje” używamy w kontekście statystycznym, a nie w odniesieniu do jednego konkretnego przypadku. Jeśli umowa ta razi Czytelnika, w miejsce słowa „istnieje” można wstawić np. „istnieje prawie na pewno”.

⁴ Oczywiście w sensie ograniczonym – liczba wierzchołków jest przecież ograniczona i wynosi N .

Definicja 3 (gigant). Niech będzie dany graf stochastycznych G , oraz niech p będzie takie, że $z = -1$. Największe drzewo, będące podgrafem G , będziemy nazywać gigantem.

Wartość $z = -1$ okazuje się być szczególna w rozwoju naszego eksperymentu. Zauważmy, że już teraz wiemy, iż wraz ze zbliżaniem się do $z = -1$ prawdopodobieństwo „dużych” drzew gwałtownie rośnie. Ale to nie wszystko.

Dotychczas rozpatrywaliśmy problem istnienia drzewa. Policzmy teraz kiedy w naszym grafie mają szansę pojawić się cykle. Rozpatrzmy najkrótszy możliwy cykl w grafie nieskierowanym, czyli cykl długości 3. Potrzebujemy dokładnie trzech wierzchołków i dokładnie trzech krawędzi między nimi. Obliczenia są bardzo podobne do poprzednich: $\binom{N}{3}p^3 \approx$. Stąd łatwo wywnioskować, że $z = -1$.

Co więcej, liczba 3 w powyższym wzorze nie miała żadnego istotnego wpływu na wynik. Oznacza to, że dla $z = -1$, możemy spodziewać się prawie na pewno dowolnie długiego cyklu. Innymi słowy przy przekroczeniu $z = -1$ prawdopodobieństwo istnienia długich cykli gwałtownie rośnie.

Ostatnią specyficzną kategorią grafów, są grafy pełne, czyli takie w których dowolna para wierzchołków jest ze sobą połączona. Z definicji grafu stochastycznego wynika, że jest on pełny, jeśli $p = 1$, czyli $z = 0$.

Policzmy jednak, kiedy możemy spodziewać się pierwszych małych podgrafów pełnych. Poszukajmy podgrafu pełnego składającego się z 4 wierzchołków. Potrzebujemy 4 wierzchołków i 6 krawędzi, czyli: $\binom{N}{4}p^6 \approx 1$, a stąd $z = \frac{-2}{3}$.

Powtarzając obliczenia podobne do tych dla drzew (licząc z dla grafu pełnego dowolnego stopnia k) potwierdzimy i rozszerzymy nasz wcześniejszy wniosek z definicji. Przy $z \rightarrow 0$ pojawiają się coraz większe grafy pełne, a co za tym idzie drzewa zanikają.

W ten sposób opisaliśmy ewolucję naszego układu od $z = -\infty$ do $z = 0$. Na początku mamy po prostu zbiór niepowiązanych wierzchołków. Przy $z \rightarrow -1$ zaczynają rosnać coraz większe drzewa. Gdy z przekroczy krytyczną wartość -1 , drzewa zaczynają ginąć. Pojawiają się cykle i grafy pełne, aż w końcu, gdy $z = 0$ cały graf staje się pełny.

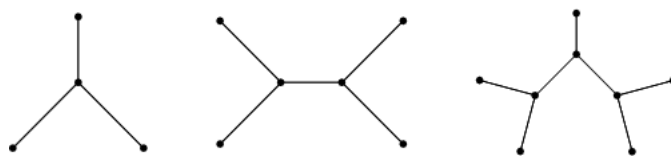
Taka ewolucja układu powinna przypomnieć nam nieco sytuację znaną z perkolacji. Okazuje się, że analogii między tymi dwoma zjawiskami jest bardzo wiele.

2. Graf stochastyczny a perkolacja

Celem tego rozdziału jest próba utożsamienia zjawiska perkolacji z opisywaną przed chwilą ewolucją grafu stochastycznego. Aby ułatwić sobie to zadanie, wprowadzimy najpierw nieco zmienioną (w pewnym sensie uogólnioną) postać problemu perkolacji. Będzie to tzw. perkolacja wiązaniowa, którą będziemy realizować nie na siatce regularnej, lecz na specyficznym grafie zwanym drzewem Cayleya.

2.1. Drzewo Cayleya

Drzewo Cayleya, to takie drzewo w którym wszystkie wierzchołki poza liśćmi, mają ten sam ustalony stopień.



Przykłady drzew Cayleya⁵.

Drzewo Cayleya ma jedną ważną przewagę nad typową siatką regularną (która też jest grafem). W pewnym sensie bowiem drzewo Cayleya tworzy struktury nieskończenie wymiarowe. Aby to zrozumieć, pokażemy najpierw w jakim sensie „zwykła siatka” ma skończony wymiar.

Niech L oznacza jaki liniowy wymiar. Możemy myśleć o L jako o długości boku kwadratu na której zbudowano naszą siatkę, lub po prostu jako o długości między punktami w jakiejś przestrzeni. Mówimy, że d jest wymiarem przestrzeni (skończonym), jeśli np. powierzchnia S w naszej przestrzeni skaluje się: $S \sim L^{d-1}$, a objętość: $V \sim L^d$. Innymi słowy w przestrzeniach skończenie wymiarowych stosunek objętości do pola jest proporcjonalny do długości. W ten sam sposób np. stosunek pola do długości powinien być proporcjonalny do długości właśnie.

W drzewie Cayleya za pole przyjmujemy po prostu liczbę węzłów całego drzewa, a za długość liczbę liści (jeśli narysuje się drzewo Cayleya wewnątrz koła, to widać skąd takie utożsamienie). Łatwo sprawdzić, że wielkości te nie są proporcjonalne. W poniższej tabeli zebrano wyniki dla kilku początkowych „małych” drzew Cayleya przy ustalonym stałym stopniu wierzchołków wewnętrznych:

| | | | | | |
|---------------|---|---|---|----|-----|
| liczba liści | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
| liczba węzłów | 4 | 6 | 8 | 10 | ... |

Jak widać w granicy stosunek będzie wynosić $\frac{1}{2}$, jednak na pewno nie jest on stały. W takiej sytuacji mówimy że figura, bądź struktura ma wymiar nieskończony. Jest to dla nas istotne z tego względu, że przy rosnącym rozmiarze grafy stochastycznego ($N \rightarrow \infty$) rośnie niejako nasze zapotrzebowanie na wymiar przestrzeni, jeśli chcemy utożsamiać zjawisko perkolacji z ewolucją grafów stochastycznych.

2.2. Perkolacja na drzewie Cayleya

Zjawisko perkolacji na drzewie Cayleya jest bardzo podobne do perkolacji na siatce kwadratowej. Krawędzie drzewa Cayleya grają u nas rolę „planszy”. Każda krawędź (a nie węzeł!) może być albo zajęta, albo nie (z prawdopodobieństwem p). Perkolacja zachodzi wtedy, gdy udaje się dojść po „zajętych” krawędziach, od któregoś z liści do tzw. środka - czyli takiego węzła, który jest oddalony najbardziej od wszystkich liści (lub od wszystkich innych wierzchołków). W zależności od tego jaki jest wybrany stopień każdego z

⁵ Źródło: <http://mathworld.wolfram.com/CayleyTree.html>.

wierzchołków, może być jeden lub więcej środków, jednak nie gra to istotnej roli. Liczy się sam fakt dojść, do któregoś ze środków.

Podobnie jak w klasycznej perkolacji, tu również okazuje się, że występuje pewna krytyczna wartość prawdopodobieństwa p przy której pojawia się tzw. klastery, czy też drzewo/graf perkolacyjny. Jeśli k jest ustalonym stopniem każdego z wewnętrznych wierzchołków drzewa Cayleya, to prawdopodobieństwo krytyczne p_c spełnia:

$$p_c \sim \frac{1}{k-1}.$$

Można to łatwo wyliczyć. Aby doszło do zjawiska perkolacji, w każdym węźle poza liściem, do którego weszliśmy, musi istnieć przynajmniej jedna krawędź którą możemy iść dalej (tam gdzie udało nam się wejść, musi być też szansa na wyjście). W każdym węźle do którego dotrzemy będzie k dróg, jedną z nich przyszlismy, czyli zostaje nam $k-1$ wyjść. Przynajmniej jedno z nich musi być „dobre” – czyli w naszej terminologii „zajęte”. Krawędzie są zajęte z prawdopodobieństwem p , czyli jeśli szukamy krytycznego p to mamy: $(k-1)p \approx 1$.

2.3. Porównanie własności grafu stochastycznego i perkolacji

Dokonamy teraz porównania wyników uzyskanych dla perkolacji oraz grafów stochastycznych. W perkolacji mamy do czynienia z tzw. klastrem perkolacyjnym – tą częścią planszy, na której zachodzi zjawisko perkolacji. W grafie stochastycznym tą rolę pełnić będzie tzw. gigant.

Zjawisko perkolacji zależne jest od prawdopodobieństwa p . W grafie stochastycznym rozpatrujemy zdefiniowany wcześniej parametr z .

1. Gdy $p < p_c$ to nie mam klastra perkolacyjnego, klastry które się formują są fraktalami. Klastery maksymalne ma $\ln N$ wierzchołków. Podobnie, gdy $z < -1$ to nie ma giganta, istnieją komponenty, które są drzewami, maksymalny komponent ma $\ln N$ wierzchołków.
2. W przypadku krytycznym $p = p_c$ pojawia się tzw. nieskończony klastery perkolacyjny, który jest fraktalem i skaluje się jak $N^{\frac{2}{3}}$. Podobnie gdy $z = -1$, to pojawia się gigant, który jest drzewem i ma średnio $N^{\frac{2}{3}}$ wierzchołków.
3. Gdy $p > p_c$ klastery perkolacyjny rośnie – własności fraktalne zanikają, a jego „masa” przyrasta wraz z $N(p-p_c)$. Podobnie w grafie, gdy $z > -1$, gigant rośnie i przestaje być drzewem – pojawiają się cykle i podgrafy pełne. Rozmiar przyrasta jak $N(f(pN) - f(p_cN))$, gdzie f to pewna funkcja ciągła, monotoniczna (?).

Wniosek 2. *Zjawiska perkolacji i ewolucji grafu stochastycznego mają tę samą klasę uniwersalności. Charakter funkcyjny wielkości charakterystycznych w okolicy krytycznych wartości prawdopodobieństwa jest taki sam. Inaczej, te same wartości wykładników krytycznych przy potęgowym opisie zależności.*

W ten sposób doszliśmy do momentu, gdy dwa zupełnie różne (z pozoru) zjawiska okazały się mieć ze sobą bardzo wiele wspólnego. W dalszej części tego opracowania spróbujemy zastosować grafy stochastyczne do modelowania

innych zjawisk rzeczywistych – w szczególności sieci złożonych występujących w naturze.

3. Modelowanie sieci rzeczywistych

W otaczającym nas świecie istnieje wiele sieci o różnych rozmiarach i o różnym charakterze. Dobry byłoby wypracować narzędzie pozwalające efektywnie symulować i modelować te rzeczywiste sieci. Niestety okazuje się, że modelowanie sieci rzeczywistych przez typowe (opisane wcześniej) grafy stochastycznie nie daje dobrych rezultatów. Własności większości zbadanych sieci rzeczywistych są znacząco różne od własności grafów stochastycznych (i co ciekawe, własności wielu różnych, niezwiązanych ze sobą sieci rzeczywistych są do siebie bardzo podobne).

Różnice między sieciami rzeczywistymi a grafami stochastycznymi są bardzo znaczące. Przede wszystkim grafy rzeczywiste mają znacznie większą klikowatość. Ponadto dystrybucja stopnia wierzchołków okazuje się być rozkładem wykładniczym, a nie jak to miało miejsce w grafach stochastycznych, rozkładem Poisson'a.

Poniżej przedstawimy kilka możliwych modyfikacji pomysłu grafu stochastycznego i przy okazji omówimy własności sieci rzeczywistych i to w jaki sposób dany model stochastyczny odpowiada tym własnościom.

3.1. Graf stochastyczny z zadaną dystrybucją (scale-free network)

Ze względu na różnice w dystrybucji stopni wierzchołków, naturalnym pomysłem jest wypracowanie metody w której możemy z góry zadać określoną dystrybucję. Jeden z popularnych pomysłów wygląda następująco:

1. Graf tworzymy z określonej liczby N wierzchołków.
2. Dla każdego wierzchołka „mocujemy zaczepy”, czyli arbitralnie ustalamy stopień każdego wierzchołka (stąd mamy ustalony rozkład stopni).
3. Losujemy parę wierzchołków i jeśli mają po jednym wolnym „zaczepie” to łączymy te zaczepy w krawędź.
4. Losowanie powtarzamy aż do wyczerpania wierzchołków z wolnymi zaczepami.

Okazuje się jednak, że przy takim postępowaniu nie jesteśmy w stanie osiągnąć odpowiednio dużej klikowatości (bez względu na metody losowania wierzchołków). Czyli nie jest to niestety dobry model dla sieci rzeczywistych.

W przypadku przeprowadzenia opisanej wyżej procedury, tak aby dystrybucja stopni była potęgowa (tak jak w sieciach rzeczywistych) – tzn. $P(k) \propto k^{-\gamma}$, obserwuje się również zjawiska ewolucyjne, które opisaliśmy wcześniej dla tradycyjnych grafów gigantycznych. Tutaj rolę zmieniającego się parametru pełni γ . Wartość krytyczną wynosi tu w przybliżeniu $\gamma = 3,47875$.

3.2. Model Wattsa-Strogatza

Model Wattsa-Strogatza to inny pomysł na budowanie grafów stochastycznych. Najlepiej opisuje się go w przypadku gdy węzły grafu ułożone są na

okręgu. Zaczynamy od sytuacji w której połączone są ze sobą wszystkie sąsiednie wierzchołki, oraz „następne” z kolej. Stopień każdego wierzchołka wynosi 4. Następnie z pewnym zadaniem prawdopodobieństwem p losujemy wierzchołek, wymazujemy jedną z jego krawędzi i łączymy go z losowo wybranym wierzchołkiem. Procedurę tą powtarzamy „przez pewien czas”. Własności otrzymanego grafu zmieniają się w zależności od tego czasu.

Cechą tego grafu, nazywaną obrazowo „small-world” jest stosunkowo duża klikowatość (szczególnie na początku, gdy niewiele krawędzi zostało „przekreślonych”). Wraz z postępem procesu zmiany krawędzi klikowatość spada. Spada również średnia odległość w między losowo wybranymi wierzchołkami.

W pewnym przedziale p i w pewnym przedziale czasu graf zbudowany tą metodą zachowuje się podobnie do sieci rzeczywistych, w sensie klikowatości i odległości między węzłami (stopień wierzchołków jest tu zawsze stały, więc tu nie szukamy podobieństw). Jednak patrząc globalnie model ten nie jest idealny.

3.3. Model Barabási-Alberta

Kolejną próbą poprawy modelowania przez grafy stochastyczne była próba z opuszczeniem założenia o tym, że N jest stałe. Zakładamy, że nasz graf rośnie w czas zarówno pod względem pojawiania się nowych krawędzi jak i pod względem liczby wierzchołków.

Model Barabási-Alberta (BA) opiera się na dwóch zasadach:

1. **Growth:** w każdej chwili czasu pojawia się nowy węzeł i m nowych krawędzi, które łączą nowy węzeł z już istniejącymi węzłami.
2. **Preferential attachment:** Prawdopodobieństwo Π , że nowy węzeł będzie połączony do węzła i zależy od stopnia k_i , zgodnie ze wzorem:

$$\Pi(i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$$

Zasada preferencyjnego dołączania faworyzuje węzły, które już są bardziej popularne od innych. Odpowiada to sytuacji ze świata rzeczywistego, kiedy chętnie dołączamy się do bardziej popularnych, silniejszych, „lepszych” części sieci.

Można pokazać, że graf budowany tą metodą ma dystrybucję wykładniczą wierzchołków, a dokładniej, że $P(k) \sim k^{-3}$.

Rozpatruje się też modyfikacje modelu BA, rezygnując z pierwszej lub drugiej zasady. I tak model w którym stosujemy tylko zasadę wzrostu, a prawdopodobieństwo Π jest takie samo dla każdego węzła, daje nam sytuację w której dystrybucja stopni jest eksponencjalna (postaci $P(k) \sim e^{-k}$). Natomiast model oparty tylko o preferencyjne dołączanie daje w rezultacie rozkład Gaussa.

Okazuje się również, że model BA daje podobne rezultaty jeśli chodzi o średnią odległość i klikowatość, jak model tradycyjny.

4. Huby w sieciach rzeczywistych

Ostatnim zagadnieniem o którym wspomniemy w tym opracowaniu jest zjawisko tzw. pięty achillesowej w sieciach. Okazuje się bowiem, że sieci rzeczywiste przejawiają naturalną tendencją do wyróżniania pewnych wierzchołków (tzw. hubów). Huby te mają bardzo duży stopień i co więcej pełnią rolę spinania całej kilku fragmentów sieci. O sieciach takich mówimy, że są to sieci super-krótkie.

Rezultatem takiej struktury sieci jest duża odporność na przypadkowe próby zniszczenia sieci (tzw. ataki terrorystyczne). Prawdopodobieństwo poważnej awarii (w szczególności rozspójnienia sieci) jest małe. W przypadku jednak planowanego ataku, w sytuacji gdy atakujący wie, które węzły są hubami, zniszczenia mogą być bardzo duże – sieć nie będzie na nie odporna.

Wniosek 3. *Typowe sieci rzeczywiste są odporne na losowe ataki, jednak są mało odporne na precyzyjne planowane ataki.*

Własność ta daje również cenne wskazówki w przypadku planowania zabezpieczania sieci przed rozprzestrzenianiem wirusów lub innych szkodliwych informacji. Najważniejszą obroną w takiej sytuacji jest „zaszczepienie” i skanowanie hubów w sieci.

Literatura

- [1] D. Makowiec: Prezentacja do wykładu *Układy złożone*, Uniwersytet Gdański, rok akademicki 2004/2005.
- [2] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes: *The shortest path to complex networks*, Physics Department of the University of Aveiro, 2004.