Witold Bołt
Krzysztof Tartas

Równania różniczkowe

wersja 0.9.8
(31 grudnia 2005)
najnowsza wersja zawsze na: `http://www.houp.info/rr/`

Wstęp

Opracowanie, które właśnie czytasz, zostało oparte na notatkach z wykładu dra hab. Antoniego Augustynowicza, prowadzonego w semestrze zimowym roku akademickiego 2004/2005 na Wydziale Matematyczno–Fizyczno–Informatycznym Uniwersytetu Gdańskiego, dla studentów II roku informatyki.

Podstawowym materiałem źródłowym były notatki sporządzone, a następnie uzupełnione i dokomentowane, przez Witolda Bołta. Duża ich część została natomiast przepisana przez Krzysztofa Tartasa.

Autorzy dołożyli wszelkich starań aby informacje tu zawarte były poprawne merytorycznie oraz podane w sposób zrozumiały. Nie gwarantujemy jednak w żadnym sensie poprawności ani bezbłędności zebranych tu materiałów. Tym bardziej za jakie kolwiek błędy w tym tekście nie należy winić naszego Wykładowcę.

Autorzy nie mieli również na celu ograniczać, pozbawiać ani naruszać żadnych praw autorskich wykładowcy, ani nikogo innego. W przypadku jeśli ktokolwiek uzna, iż opracowanie to narusza jakiekolwiek z jego praw, prosimy o kontakt.

Aktualną wersję tego skryptu można znaleźć w internecie: http://www.houp.info/rr/. Kontakt z autorami możliwy jest przez e–mail: Witold Bołt ⟨ja@houp.info⟩, Krzysztof Tartas ⟨ktartas@gmail.com⟩

W internecie można również znaleźć inne opracowania napisane przez nas, z przedmiotów takich jak Analiza Matematyczna, Algebra Liniowa oraz Logika Matematyczna. Więcej informacji na stronie: http://www.houp.info/.

Podziękowania...

Dziękuję serdecznie wszystkim którzy w jakikolwiek sposób przyczynili się do pogłębienia naszej wiedzy o równaniach różniczkowych, oraz tym wszystkim którzy bezpośrednio pomagali przy tworzeniu tego skryptu. Dziękuję za wszelkie sugestie, poprawki, dobre słowa, podziękowania i niespodzianki;).

W sposób szczególny dziękuję naszemu Wykładowcy dr hab. A. Augustynowiczowi, który zgodził się przeczytać i poprawić to opracowanie, co kosztowało go z pewnością sporo pracy i czasu.

Skrypt ten dedykujemy wszystkim tym, którzy będą się z niego uczyć, życząc jednocześnie jak najlepszych rezultatów na wszelkich egzaminach.

W sposób szczególny moją pracę i trud chciałbym dedykować *Dorotce*, dziękując jednocześnie za wsparcie, pomoc, obecność i wyrozumiałość.

Witold Bołt

Spis treści

Rozdział 1

Równanie liniowe pierwszego rzędu

Dla krótkości wprowadzimy następujące oznaczania:

- Równanie liniowe jednorodne $(RJ)\colon\ x'(t) = a(t)x(t)$.
- Równanie liniowe niejednorodne $(RN)\colon\ x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$.
- Warunek początkowy $(WP)\colon\ x(t_0) = x_0$.

1.1 Równanie liniowe jednorodne

Twierdzenie 1.1.1 (istnienie i jednoznaczność rozwiązania $(RJ),(WP)$)**.** *Jeżeli funkcja $a\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jest ciągła, $t_0 \in (\alpha,\beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, wtedy zagadnienie $(RJ),(WP)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Plan dowodu:

1. Podajemy wzór funkcji która ma szansę być jedynym rozwiązaniem $(RJ),(WP)$.
2. Pokazujemy, że funkcja dana wzorem z punktu 1 na pewno jest rozwiązaniem.

Dowód. Niech funkcja $z\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem (RJ). Wtedy oczywiście spełnia:

$$z'(t) - a(t)z(t) = 0.$$

Pomnóżmy powyższą równość obustronnie przez $e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Mamy:

$$z'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - a(t)z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} = 0.$$

Lewa strona jest pochodną iloczynu, stąd:

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\right) = 0.$$

Całkujemy obustronnie w granicach od t_0 do t i otrzymujemy:

$$z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} = z(t_0).$$

Czyli:

$$z(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Wiemy teraz, że jeśli jakaś funkcja jest rozwiązaniem (RJ) to daje się wyrazić powyższym wzorem. Pokażemy, że jeśli funkcja daje się wyrazić takim wzorem to istotnie jest to rozwiązanie. Wstawmy więc ją do równania z warunkiem początkowym:

$$\begin{cases} z'(t) = a(t)e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}x_0 = a(t)z(t) \\ z(t_0) = e^0 x_0 = x_0 \end{cases} \qquad \square$$

Wniosek 1.1.2. Zauważmy, że z danego w dowodzie wzoru wynika, że:

- jeśli $x_0 = 0$, to rozwiązanie $z \equiv 0$,
- jeśli $x_0 \neq 0$, to $\forall_t z(t) \neq 0$.

1.2 Równanie liniowe niejednorodne

Twierdzenie 1.2.1 (postać rozwiązania (RN))**.** *Funkcja $z\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem zagadnienia $(RN), (WP)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $z = u + \varphi$, gdzie u jest rozwiązaniem $(RJ), (WP)$, natomiast φ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego z warunkiem zerowym ($x(t_0) = 0$).*

Plan dowodu: Implikacja „⇒”:

1. Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że u jest wyznaczone jednoznacznie (znany jest wzór).
2. Zakładamy, że znamy $z(t)$ które jest rozwiązaniem (RN).
3. Pokazujemy, że φ jest wtedy rozwiązaniem równania niejednorodnego, oraz że spełnia warunek początkowy zerowy: $x(t_0) = 0$.

Implikacja „⇐”:

1. Zakładamy, że u i φ spełniają treść twierdzenia (są odpowiednimi rozwiązaniami).
2. Pokazujemy, że wtedy z musi być rozwiązaniem (RN).

Dowód*.* Implikacja „⇒”: Z poprzedniego twierdzenia wiadomo, że istnieje u i że jest wyznaczone jednoznacznie. Załóżmy, że znana jest funkcja z, która spełnia (RN). Rozważmy więc funkcję: $\varphi(t) = z(t) - u(t)$. Oczywiście pochodna φ wyraża się wzorem: $\varphi'(t) = z'(t) - u'(t)$. Rozpisując ten wzór (korzystamy, z tego, że u spełnia równanie jednorodne, a z równanie niejednorodne), mamy:

$$z'(t) - u'(t) = a(t)z(t) + b(t) - a(t)u(t) = a(t)[z(t) - u(t)] + b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

Otrzymaliśmy więc równość:

$$\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

co świadczy o tym, że rzeczywiście φ spełnia równanie niejednorodne. Sprawdźmy jeszcze warunek początkowy:

$$\varphi(t_0) = z(t_0) - u(t_0) = x_0 - x_0 = 0$$

Czyli φ spełnia jednorodny (zerowy) warunek początkowy.

Pokazaliśmy więc, że dowolne rozwiązanie z równania niejednorodnego daje się zapisać jako: $u + \varphi$ (bo dobraliśmy odpowiednie φ dla dowolnego z). W ten sposób zakończyliśmy pierwszą część dowodu.

Implikacja „$\Leftarrow$": Niech u i φ spełniają założenia twierdzenia. Niech $z = u + \varphi$. Takie z spełnia równanie (RN) z odpowiednim warunkiem początkowym, bo:

$$z'(t) = u'(t) + \varphi'(t) = a(t)u(t) + a(t)\varphi(t) + b(t) =$$

$$= a(t)[u(t) + \varphi(t)] + b(t) = a(t)z(t) + b(t),$$

oraz:

$$z(t_0) = u(t_0) + \varphi(t_0) = x_0.$$

Pokazaliśmy więc, że jeśli znamy rozwiązanie równania jednorodnego (z warunkiem (WP)) oraz dowolne rozwiązanie równania niejednorodnego z warunkiem zerowym (jednorodnym) to jesteśmy w stanie zbudować rozwiązanie (RN), (WP). $\square$

Twierdzenie 1.2.2 (istnienie i jednoznaczność rozwiązania $(RN), (WP)$)**.** *Jeżeli funkcje $a, b \colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ są ciągłe, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, to zagadnienie $(RN), (WP)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Plan dowodu:

1. Zakładamy, że funkcja z jest rozwiązaniem.
2. Wstawiamy do równania i podajemy wzór na z.
3. Pokazujemy, że jeśli funkcja jest dana wzorem z 2., to na pewno jest rozwiązaniem – czyli rozwiązanie zawsze istnieje i jest jedyne.

Dowód. Załóżmy, że z jest rozwiązaniem (RN), czyli spełnia:

$$z'(t) - a(t)z(t) = b(t).$$

Pomnożymy tą równość obustronnie przez $e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$. Mamy wtedy:

$$z'(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - a(t)z(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} = b(t)e^{\int_{t_0}^t a(s)ds},$$

gdzie lewa strona jest pochodną iloczynu, czyli:

$$\frac{d}{dt}\left(z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}\right) = b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}.$$

Całkujemy obustronnie w granicach od t_0 do t:

$$z(t)e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds} - z(t_0) = \int_{t_0}^t b(k)e^{-\int_{t_0}^k a(s)ds}dk.$$

Stąd mamy wzór:

$$(**) \quad z(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^t a(s)ds}\int_{t_0}^t b(k)e^{\int_k^{t_0} a(s)ds}dk.$$

Co można zapisać prościej:

$$(*) \quad z(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} b(k) e^{\int_{k}^{t} a(s)ds} dk.$$

Oczywiście taka funkcja z spełnia warunek początkowy: $z(t_0) = x_0$. Wiemy, więc, że jeśli jakaś funkcja jest rozwiązaniem, to musi dać sie wyrazić przez wzór $(*)$. Sprawdźmy więc, czy rzeczywiście jest to zawsze rozwiązanie. Skorzystamy z postaci $(**)$ aby policzyć pochodną z:

$$z'(t) = x_0 a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + a(t) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(k) e^{\int_{k}^{t_0} a(s)ds} dk +$$

$$+ e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} b(t) e^{\int_{t}^{t_0} a(s)ds} =$$

$$= a(t) \left[x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} \int_{t_0}^{t} b(k) e^{\int_{k}^{t_0} a(s)ds} dk \right] + b(t) =$$

$$= a(t) z(t) + b(t).$$

□

Twierdzenie 1.2.3 (postać ogólnego rozwiązania (RN)). *Jeżeli u jest rozwiązaniem niezerowym równania liniowego jednorodnego, φ jest rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego, to następujące warunki są równoważne:*

(a) v jest rozwiązaniem równania,

(b) istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $v = cu + \varphi$.

Plan dowodu: Implikacja „$(a) \Leftarrow (b)$”: Znamy u i φ. Definiujemy $v = cu + \varphi$ i pokazujemy, że na pewno jest to rozwiązanie (RN).

Implikacja: „$(a) \Rightarrow (b)$”:

1. Zakładamy, że u i φ są dane. Pokazujemy, że da się znaleźć odpowiednią stałą c, taką że $v - \varphi = cu$.
2. Korzystając z tego że $\forall_t u(t) \neq 0$ badamy iloraz $\frac{v-\varphi}{u}$ i pokazujemy że jest on stały, czyli: $\left(\frac{v-\varphi}{u}\right)' = 0$.

Dowód. „$(a) \Leftarrow (b)$”: Niech $v = cu + \varphi$. Wtedy, oczywiście:

$$v'(t) = cu'(t) + \varphi(t) = ca(t)u(t) + a(t)\varphi(t) + b(t) =$$

$$= a(t)(cu(t) + \varphi(t))) + b(t) = a(t)v(t) + b(t).$$

co kończy dowód tej implikacji.

„$(a) \Rightarrow (b)$”: Pokażemy, że dla dowolnego rozwiązania równania niejednorodnego v da się dobrać odpowiednią stałą c tak aby zachodziło $v - \varphi = cu$.

Zauważmy, że $v - \varphi$ jest rozwiązaniem równania liniowego jednorodnego, bo:

$$(v(t) - \varphi(t))' = v'(t) - \varphi'(t) = a(t)v(t) + b(t) - a(t)\varphi(t) - b(t) =$$

$$= a(t)(v(t) - \varphi(t)).$$

Wprowadźmy oznaczenie $p(t) = v(t) - \varphi(t)$.

Zauważmy, że z jednoznaczności rozwiązania równania jednorodnego wynika, że jeśli $\exists_t u(t) = 0$, to $\forall_t u(t) = 0$. W treści twierdzenia zakładamy jednak, że u jest rozwiązaniem niezerowym (czyli $u \not\equiv 0$). Wiemy więc, że u nie zeruje się nigdzie. Aby sprawdzić czy $v - \varphi = cu$ wystarczy więc pokazać, że: $\frac{p(t)}{u(t)} = const$, czyli $\left(\frac{p(t)}{u(t)}\right)' = 0$. Rozpisując lewą stroną mamy:

$$\left(\frac{p(t)}{u(t)}\right)' = \frac{p'(t)u(t) - p(t)u'(t)}{u^2(t)} = 0$$

czyli rzeczywiście $v - \varphi = cu$, a to oznacza, że dla dowolnego rozwiązania v możemy dobrać odpowiednią stałą c. □

Udowodnimy teraz twierdzenie, które umożliwia stosowanie „metody uzmienniania stałej” dla równań liniowych niejednorodnych rzędu pierwszego.

Twierdzenie 1.2.4. *Jeżeli u jest rozwiązaniem równania jednorodnego (niezerowym), to istnieje funkcja ψ taka, że $\varphi(t) = \psi(t)u(t)$ jest rozwiązaniem równania niejednorodnego.*

Plan dowodu:

1. Korzystamy z założenia że u jest rozwiązaniem.
2. Wyznaczamy wzór na $\psi(t)$.
3. Pokazujemy, że rzeczywiście $\varphi(t) = \psi(t)u(t)$ jest rozwiązaniem (RN).

Dowód. Chcemy pokazać, że jeśli $\varphi(t) = \psi(t)u(t)$, to $\varphi'(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$, dla pewnej funkcji ψ. Policzmy pochodną φ:

$$\varphi'(t) = \psi'(t)u(t) + \psi(t)u'(t) = \psi'(t)u(t) + \psi(t)u(t)a(t)$$

Skoro φ ma spełniać równanie niejednorodne, to musi zachodzić:

$$\varphi'(t) = \psi'(t)u(t) + \psi(t)u(t)a(t) = a(t)\underbrace{\psi(t)u(t)}_{\varphi(t)} + b(t).$$

Czyli:

$$\psi'(t)u(t) = b(t).$$

Wiemy, że u jest niezerowym rozwiązaniem, a skoro tak, to na pewno zachodzi[1] $\forall_t u(t) \neq 0$, więc możemy podzielić:

$$\psi'(t) = \frac{b(t)}{u(t)}.$$

[1]Patrz wniosek z tw. o istnieniu rozwiązania (RJ).

Stąd mamy wzór na ψ:

$$\psi(t) = \int \frac{b(t)}{u(t)} dt.$$

Nasza funkcja φ ma więc postać: $\varphi(t) = u(t) \int \frac{b(t)}{u(t)} dt$. Wstawimy ją do równania i pokażemy, że rzeczywiście je spełnia:

$$\varphi'(t) = u'(t) \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + u(t) \frac{b(t)}{u(t)} = a(t)u(t) \int \frac{b(t)}{u(t)} dt + b(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

□

Rozdział 2

Równanie o zmiennych rozdzielonych

Podobnie jak poprzednio, dla krótkości zapisów, stosować będziemy następujące oznaczenia:

- równanie o zmiennych rozdzielonych (RZ): $x'(t) = g(t)h(x(t))$,
- warunek początkowy (WP): $x(t_0) = x_0$.

2.1 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania

Podamy warunki jakie musi spełniać zagadnienie, aby miało dokładnie jedno rozwiązanie. Poniższe dwa twierdzenia odnoszą się do specjalnych przypadków równań o zmiennych rozdzielonych, w których występująca po prawej stronie funkcja h nie zeruje się, lub zeruje się tylko w jednym miejscu (i to w dodatku dokładnie w miejscu x_0). Drugie twierdzenie daje się uogólnić dla przypadków, gdy h zeruje się w skończonej (przeliczalnej) liczbie punktów, jednak uogólnienie to wykracza poza zakres tego opracowania (i wykładu).

Twierdzenie 2.1.1 (istnienie i jednoznaczoność rozwiązania $(RZ), (WP)$ dla h niezerującego się)**.** *Niech $g\colon (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $h\colon (\gamma, \delta) \to \mathbb{R}$. Jeżeli funkcje g i h są ciągłe oraz funkcja h nie zeruje się dla dowolnego $t \in (\gamma, \delta)$, to zagadnienie $(RZ), (WP)$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

Plan dowodu:

1. Zakładamy, że z jest rozwiązaniem.
2. Podajemy wzór uwikłany na z.
3. Zakładamy, że $h(z(t)) > 0$ i podajemy rozwikłany wzór w tym przypadku. (Dla $h(z(t)) < 0$ analogicznie.)
4. Sprawdzamy czy funkcja dana takim wzorem spełnia równanie.

Dowód. Niech $z\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest rozwiązaniem. Niech $(a, b) \subset (\alpha, \beta)$, oraz $t_0 \in (a, b)$. (Uwaga: Rozwiązanie będzie określone w pewnym otoczeniu t_0.)

Skoro z jest rozwiązaniem, to oczywiście:

$$z'(t) = g(t)h(z(t)).$$

Podzielmy tę równość obustronnie przez $h(z(t))$:

$$\frac{z'(t)}{h(z(t))} = g(t),$$

a następnie scałkujmy obustronnie w granicach od t_0 do t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{z'(s)}{h(z(s))} ds = \int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

W całce po lewej stronie wykonujemy podstawienie $z(s) = u$:

$$\int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds,$$

co daje nam uwikłany wzór na $z(t)$. Wprowadźmy teraz następujące oznaczenia:

$$z(t) = y,$$

$$H(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{du}{h(u)},$$

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)ds.$$

Przy takich oznaczeniach nasze równanie (wyznaczające z) ma postać:

$$H(y) = G(t).$$

Oczywiście zachodzi: $H'(y) = \frac{1}{h(y)}$. Załóżmy, że $h(u) > 0$ dla $u \in (\gamma, \delta)$. (W przypadku gdy $h(u) < 0$ dowód przebiega analogicznie.) Wtedy:

$$H'(y) > 0.$$

Wiemy więc, że H jest ściśle rosnąca więc istnieje H^{-1}, czyli:

$$z(t) = y = H^{-1}(G(t)).$$

Gdzie:

$$H \colon (\gamma, \delta) \to \left(\int_{x_0}^{\gamma} \frac{du}{h(u)}, \int_{x_0}^{\delta} \frac{du}{h(u)} \right)$$

$$H^{-1} \colon \left(\int_{x_0}^{\gamma} \frac{du}{h(u)}, \int_{x_0}^{\delta} \frac{du}{h(u)} \right) \to (\gamma, \delta)$$

Czyli $z(t)$ jest określona w pewnym otoczeniu punktu t_0. Otoczenie to może być wyznaczone z nierówności:

$$\int_{x_0}^{\gamma} \frac{du}{h(u)} < G(t) < \int_{x_0}^{\delta} \frac{du}{h(u)}$$

Wystarczy pokazać, że tak wyznaczone $z(t)$ jest rzeczywiście rozwiązaniem zagadnienia:

$$z(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0$$

Aby policzyć pochodną korzystamy z uwikłanego wzoru:

$$H(z(t)) = G(t).$$

Różniczkujemy obustronnie i dostajemy:

$$H'(z(t))z'(t) = G'(t).$$

Czyli, korzystając z definicji H i G, mamy:

$$\frac{z'(t)}{h(z(t))} = g(t),$$

$$z'(t) = g(t)h(z(t)).$$

Ostatnia równość świadczy o tym, że z rzeczywiście spełnia równanie. □

Twierdzenie 2.1.2 (Istnienie i jednoznaczność rozwiązania (RZ), (WP), dla h zerującego się w jednym punkcie)**.** *Niech $g\colon (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, $h\colon (\gamma,\delta) \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, $g \not\equiv 0$, $h(\eta) = 0$, $h(x) \neq 0$ dla $x \neq \eta$. Wtedy każde zagadnienie $x'(t) = g(t)h(x(t))$, $x(t_0) = \eta$, $(t_0 \in (\alpha,\beta))$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy całki: $\int_\eta^{\eta+\epsilon} \frac{du}{h(u)}$, $\int_\eta^{\eta-\epsilon} \frac{du}{h(u)}$ są rozbieżne dla pewnego $\epsilon > 0$.*

Plan dowodu:

1. Zauważamy, że funkcja $z \equiv \eta$ spełnia równanie z warunkiem $x(t_0) = \eta$. Czyli zawsze istnieje przynajmniej jedno rozwiązanie.

2. Pokażemy, że istnieje inne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy całka $\int_\eta^{\eta+\epsilon} \frac{du}{h(u)}$, lub całka $\int_\eta^{\eta-\epsilon} \frac{du}{h(u)}$ jest zbieżna dla pewnego $\epsilon > 0$.

3. Dowód implikacji „$\Rightarrow$”:

   a) Zakładamy, że istnieje rozwiązanie φ takie, że φ nie jest stale równe η.

   b) Rozpatrujemy równanie na mniejszym przedziale, takim, że w jego wnętrzu i na jednym krańcu $\varphi \not\equiv \eta$.

   c) Dochodzimy do tego, że jedna z całek występujących w twierdzeniu musi być zbieżna, co świadczy o tym, że założenie o istnieniu rozwiązania $\varphi \neq \eta$ było niepoprawne.

4. Dowód implikacji „$\Leftarrow$”:

   a) Zakładamy zbieżność jednej z całek.

   b) Korzystając z tego wyznaczamy uwikłany wzór na rozwiązanie φ które nie jest stałe - czyli założenie o zbieżności jednej z całek prowadzi do sprzeczności (tzn. istnieje więcej niż jedno rozwiązanie).

Dowód. 1. Zauważmy, że funkcja $\varphi \equiv \eta$ jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia.

2. W dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że istnieje jeszcze inne rozwiązanie i z tego wynikać będzie, że przynajmniej jedna z całek jest zbieżna. W drugą stronę, założenie, że jedna z całek jest zbieżna prowadzić będzie do istnienia dodatkowych rozwiązań.

3. Dowód implikacji „$\Rightarrow$”:

   Załóżmy, że φ jest rozwiązaniem zagadnienia (RZ), $\varphi(t_0) = \eta$, $\varphi \not\equiv \eta$. Wtedy na pewno:
   $$\exists_{t_1 \in (\alpha,\beta)} \varphi(t_1) \neq \eta.$$
   Załóżmy, że $t_0 < t_1$ (przeciwny przypadek rozpatrzymy później - jest analogiczny). Niech teraz:
   $$t_2 = \sup\{t \in \langle t_0, t_1) : \varphi(t) = \eta\}.$$
   Wtedy na pewno $\varphi(t) \neq \eta$ dla $t \in (t_2, t_1)$.

   Skoro φ jest rozwiązaniem, to dla $t \in (t_2, t_1)$:
   $$\varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t)).$$
   W przedziale $t \in (t_2, t_1)$, $h(\varphi(t))$ nie zeruje się, więc można podzielić:
   $$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t).$$
   Dla dowolnego $\bar{t} \in (t_2, t_1)$ możemy napisać:
   $$\int_{\bar{t}}^{t_1} \frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} dt = \int_{\bar{t}}^{t_1} g(t)dt.$$
   W całce z lewej strony zastosujmy zamianę zmiennych $u = \varphi(t)$, mamy więc:
   $$\int_{\varphi(\bar{t})}^{\varphi(t_1)} \frac{du}{h(u)} = \int_{\bar{t}}^{t_1} g(t)dt.$$
   Oczywiście $(\bar{t}, t_1) \subset (\alpha, \beta)$, a funkcja g jest ciągła, więc całka po prawej stronie istnieje. Całka z lewej strony również musi istnieć. Przejdźmy teraz do granicy $\bar{t} \to t_2$, mamy wtedy:
   $$\int_{\eta}^{\varphi(t_1)} \frac{du}{h(u)} = \int_{t_2}^{t_1} g(t)dt$$
   Całka z prawej strony jest określona (istnieje). Jeśli więc $\varphi(t_1) > \eta$, to całka $\int_{\eta}^{\eta+\epsilon} \frac{du}{h(u)}$ jest zbieżna dla pewnego $\epsilon > 0$, a dokładniej dla $\epsilon = \varphi(t_1) - \eta > 0$. Jeśli natomiast $\varphi(t_1) < \eta$, to całka $\int_{\eta}^{\eta-\epsilon} \frac{du}{h(u)}$ jest zbieżna dla $\epsilon = \eta - \varphi(t_1) > 0$. Co kończy część dowodu przy założeniu $t_1 > t_0$.

   Załóżmy więc, że $t_1 < t_0$. Oznaczmy wtedy:
   $$t_2 = \inf\{t \in (t_1, t_0\rangle,\ \varphi(t) = \eta\}$$
   Dalsze rozważanie jest analogiczne i prowadzi nas do zbieżności całki:
   $$\int_{\eta}^{\varphi(t_1)} \frac{du}{h(u)},$$
   co kończy dowód implikacji „$\Rightarrow$”.

4. Dowód implikacji „$\Leftarrow$": Załóżmy, że całka:
$$\int_{\eta}^{\eta+\epsilon}\frac{du}{h(u)},$$
jest zbieżna dla pewnego $\epsilon > 0$. Będziemy rozpatrywać różne przypadki ze względu na znaki g i h (musimy rozpatrywać te przypadki aby zapewnić zgodność znaków w odpowiednich nierównościach i równościach).

Załóżmy, że $h(u) > 0$ dla $u > \eta$. Niech $t_0 \in (\alpha, \beta)$ będzie takie, że $g(t_0) \neq 0$. Załóżmy, że $g(t_0) > 0$. Przy takich założeniach:
$$\exists_{\epsilon>0}\int_{\eta}^{\eta+\epsilon}\frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds,$$
dla pewnych t większych lub równych t_0. Musimy tylko określić dla jakich. (Zauważmy, że całka po prawej stronie istnieje dla każdego t z dziedziny równania. Założyliśmy jednak zbieżność całki po stronie lewej tylko dla pewnego ϵ. Nie wiemy jak duże jest to *epsilon* i czy „wystarczy" dla każdego t. Być może trzeba będzie ograniczyć nieco dziedzinę rozwiązania.) Niech teraz $\overline{\epsilon}$ będzie największą możliwą wartością ϵ tak, aby $\int_{\eta}^{\eta+\epsilon}\frac{du}{h(u)}$ istniała. (Jeśli nie da się znaleźć takiego $\overline{\epsilon}$ to bierzemy najmniejsze ϵ dla którego całka nie istnieje i poniższą słabą nierówność zamieniamy na ostrą.) Wtedy rozwiązanie nierówności:
$$\int_{\eta}^{\eta+\overline{\epsilon}}\frac{du}{h(u)} \geqslant \int_{t_0}^{t} g(s)ds,$$
daje nam dziedzinę, w której równość:
$$(*) \qquad \int_{\eta}^{\varphi(t)}\frac{du}{h(u)} = \int_{t_0}^{t} g(s)ds,$$
wyznacza rozwiązanie $\varphi(t)$. Rozwiązanie takie rzeczywiście nie jest stałe, oraz spełnia warunek początkowy, czyli założenie o zbieżności całki prowadzi nas do istnienia więcej niż jednego rozwiązania.

To kończy dowód jednego z przypadków. Inne otrzymujemy analogicznie (zmieni się dziedzina szukanego rozwiązania, oraz być może kolejność granic w całce). W ten sposób kończymy dowód przy założeniu, że całka $\int_{\eta}^{\eta+\epsilon}\frac{du}{h(u)}$ jest zbieżna. Przypadek gdy $\int_{\eta}^{\eta-\epsilon}\frac{du}{h(u)}$ jest zbieżna, przebiega analogicznie.

□

2.2 Równania o rozdzielających się zmiennych

Równania o rozdzielających się zmiennych, to równania, które poprzez odpowiednie przekształcenia, bądź podstawienia można sprowadzić do równań o rozdzielonych zmiennych. Przedstawimy poniżej kilka przykładów takich równań.

2.2.1 Równanie jednorodne

Nie należy mylić tego równania, z równaniem liniowym jednorodnym. Jest to zupełnie coś innego. Równanie jednorodne to równanie postaci:
$$x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right).$$

Aby je rozwiązać wykonujemy podstawienie: $x(t) = tz(t)$. Wtedy równanie ma postać:

$$z(t) + tz'(t) = f(z(t)),$$

co daje się łatwo rozwiązać:

$$z'(t) = \frac{1}{t}(f(z(t)) - z(t)),$$

$$\frac{z'(t)}{f(z(t)) - z(t)} = \frac{1}{t},$$

$$\int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{du}{f(u) - u} = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s} ds.$$

2.2.2 Równanie Bernoulliego

Równanie Bernoulliego, to równanie postaci:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t)^p, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

Po pierwsze zauważmy, że gdy $p = 0$ to mamy do czynienia z równaniem liniowym jednorodnym, natomiast gdy $p = 1$ z równaniem liniowym niejednorodnym. W obu przypadkach znamy proste metody znajdowania rozwiązań. Załóżmy więc, że $p \neq 0$ oraz $p \neq 1$.
Aby rozwiązać to równaniem wykorzystamy podstawienie: $x(t) = z(t)^r$, gdzie r jest pewną ustaloną liczbą, którą zaraz wyliczymy:

$$rz'(t)z^{r-1}(t) = a(t)^r z(t) + b(t)z^{pr}(t),$$

$$z'(t) = \frac{1}{r}a(t)z(t) + \frac{1}{r}b(t)z^{pr-r+1}(t).$$

Niech więc $r = \frac{1}{1-p}$, wtedy równanie ma postać:

$$z'(t) = (1-p)a(t)z(t) + (1-p)b(t).$$

Jest to równanie liniowe, które łatwo daje się rozwiązać.

2.2.3 Równanie Ricattiego

Równanie Ricattiego, to równanie postaci:

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t).$$

Podamy metodę rozwiązania, gdy znamy przynajmniej jedno rozwiązanie. Niech x_1 będzie tym rozwiązaniem. Wykonujemy podstawienie: $x = x_1 + z$. Wówczas:

$$x_1'(t) + z'(t) = a(t)x_1(t) + a(t)z(t) + b(t)\left(x_1(t) + z(t)\right)^2 + c(t),$$

skąd otrzymujemy:

$$z'(t) = (a(t) + 2b(t)x_1(t))z(t) + b(t)z^2(t),$$

co jest prostym równaniem Bernoulliego.

2.2.4 Równanie typu: $x'(t) = f(at + bx(t) + c)$

Aby rozwiązać takie równanie stosujemy podstawienie: $at + bx(t) + c = z(t)$ i mamy:

$$\frac{1}{b}z'(t) - \frac{a}{b} = f(z(t)),$$

$$z'(t) = a + bf(z(t)),$$

$$\int_{z(t_0)}^{z(t)} \frac{du}{a + bf(u)} = t - t_0.$$

2.2.5 Równanie typu: $x'(t) = f\left(\frac{At+Bx(t)+c}{at+bx(t)+c}\right)$

Niech W oznacza wyznacznik:

$$W = \begin{vmatrix} A & B \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Rozpatrzymy przypadki ze względu na W:

1. $W = 0$: Znaczy to, że istnieje λ taka, że:

$$At + Bx(t) = \lambda(at + bx(t)).$$

Możemy więc zastosować podstawienie: $at + bx(t) = z(t)$ i wtedy mamy:

$$\frac{1}{b}z'(t) - \frac{a}{b} = f\left(\frac{\lambda z(t) + C}{z(t) + c}\right),$$

co daje się łatwo rozwiązać.

2. $W \neq 0$: W tym przypadku podstawienie będzie bardzie skomplikowane. Musimy podstawić coś zarówno za x jak i za t:

$$\begin{cases} x(t) = z(s) + \alpha \\ t = s + \beta \end{cases}$$

Gdzie α i β to liczby które zaraz wyznaczymy:

$$x'(t) = \frac{d}{dt}(z(s) + \alpha) = \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt} = z'(s)$$

$$z'(s) = f\left(\frac{As + Bz(s) + A\beta + B\alpha + C}{as + bz(s) + a\beta + b\alpha + c}\right)$$

$$\begin{cases} A\beta + B\alpha = -C \\ a\beta + b\alpha = -c \end{cases}$$

Powyższy układ ma jednoznaczne rozwiązanie, ze względu na założenie $W \neq 0$. Wstawiając rozwiązania układu do naszego równania, mamy:

$$z'(s) = f\left(\frac{A + B\frac{z(s)}{s}}{a + b\frac{z(s)}{s}}\right).$$

Takie równanie daje się już łatwo rozwiązać.

Rozdział 3

Istnienie rozwiązania - tw. Peano

3.1 Wprowadzenie

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenie Peano, które będzie mówić o istnieniu rozwiązania równania pierwszego rzędu. Zanim jednak podamy dowód tego twierdzenia (jak i samą treść), musimy wprowadzić kilka definicji i faktów pomocniczych.

3.1.1 Oznaczenia

Rozważać będziemy zagadnienie:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio to zagadnienie, nazywać będziemy $(PC), (WP)$, gdzie (PC) to skrót od „problem Cauchy'ego", natomiast (WP) – „warunek początkowy".

3.1.2 Definicje i lematy

Definicja 3.1.1 (ciąg funkcji wspólnie ograniczony)**.** Mówimy, że ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest wspólnie ograniczony jeżeli:

$$\exists_M \forall_n \forall_{x \in [a,b]} \ |f_n(x)| \leqslant M.$$

Definicja 3.1.2 (funkcje jednakowo ciągłe)**.** Mówimy, że funkcje $\{f_n\}$ są jednakowo ciągłe jeżeli:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_n \forall_{x,x' \in [a,b]} \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon.$$

Definicja 3.1.3 (jednostajna zbieżność ciągu funkcyjnego)**.** Mówimy, że ciąg funkcji $g_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie zbieżny do funkcji g, jeżeli:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_N \forall_{n>N} \forall_{x \in [a,b]} \ |g_n(x) - g(x)| < \epsilon.$$

Zapisujemy to: $g_n \rightrightarrows g$.

Lemat 3.1.4 (twierdzenie Arzeli–Ascoli)**.** *Załóżmy, że* $f_n \colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, ...$, *oraz funkcje* $\{f_n\}$ *są wspólnie ograniczone i jednakowo ciągłe, wtedy istnieje podciąg* $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *taki, że jest on jednostajnie zbieżny na odcinku* $[a, b]$.

Dowód: Lemat podany bez dowodu[1].

Twierdzenie 3.1.5 (o granicy całki jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyjnego)**.** *Jeżeli ciąg funkcji $\{f_n\}$ jest jednostajnie zbieżny do f, to:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Dowód: Twierdzenie podajemy bez dowodu.

Potrzebne będzie nam jeszcze zdefiniowanie normy. Formalną definicję można znaleźć w notatkach do wykładu Algebra Liniowa. My za definicje przyjmiemy konkretne przykłady norm w konkretnych przestrzeniach. Oznaczenia i wzory zebrano w poniższej definicji.

Definicja 3.1.6 (norma)**.** Dla $\mathbb{R}^n$ używać będziemy norm:

$$||x||_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$||x||_\infty = \max_i |x_i|.$$

Dla przestrzeni funkcji ciągłych określonych na przedziale $[a,b]$, którą oznaczamy przez $C([a,b])$, używać będziemy norm:

$$||x||_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

$$||x||_0 = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|.$$

Definicja 3.1.7 (ciąg Cauchy'ego)**.** Ciąg $\{x_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego gdy:

$$\forall_{\epsilon>o}\forall_k\exists_N\forall_{n>N}\ ||x_n - x_k|| < \epsilon$$

Definicja 3.1.8 (przestrzeń Banacha)**.** Przestrzeń unormowaną w której każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny nazywamy przestrzenią Banacha.

Definicja 3.1.9 (odcinek w przestrzeni liniowej)**.** Odcinkiem łączącym elementy a i b w przestrzeni liniowej, nazywamy zbiór:

$$\{\lambda a + (1-\lambda)b\colon \lambda \in [0,1]\}$$

Definicja 3.1.10 (zbiór wypukły)**.** Zbiór nazywamy wypukłym w przestrzeni liniowej, jeżeli to, że dwa punkty należą do niego, pociąga za sobą, że cały odcinek łączący te punkty też należy do tego zbioru.

Definicja 3.1.11 (zbiór zwarty)**.** Zbiór nazywamy zwartym jeżeli z każdego ciągu zawartego w tym zbiorze da się wybrać podciąg zbieżny do granicy w tym zbiorze.

[1]Dowód można znaleźć w internecie, na przykład tu: `http://www.lukebiewald.com/arzela.pdf`.

Uwaga 3.1.12 (tw. Bolzano–Weierstrassa)**.** Każdy podzbiór K przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy jest domknięty i ograniczony,

Definicja 3.1.13 (zbiór relatywnie zwarty)**.** Zbiór nazywamy relatywnie zwartym jeśli jego domknięcie jest zbiorem zwartym.

Definicja 3.1.14 (operator)**.** Operatorem nazywamy taką funkcję, której dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór funkcji. Dla operatorów stosuje się często uproszczoną notację, tzn. argumentu operatora nie umieszcza się w nawiasach. Jeśli F jest operatorem, a x funkcją z jego dziedziny, to zapis: $(Fx)(t)$ oznacza wartość funkcji która jest wartością operatora F dla argumentu x w punkcie t.

Powyższa definicja może wydać się skomplikowana, jednak wszystko to jest bardzo proste. W matematyce bardzo często spotykamy operatorami (czasem nawet nieświadomie). Często stosowanymi operatorami są: operator różniczkowania (wtedy: $(Fx)(t) = x'(t)$) albo operator całkowania (wtedy: $(Fx)(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds$).

Twierdzenie 3.1.15 (Schaudera o punkcie stałym)**.** *Niech $F\colon E \to E$ będzie funkcją ciągłą gdzie E jest przestrzenią Banacha. Jeżeli $F(E)$ zawiera się w zbiorze relatywnie zwartym, to istnieje $x \in E$, taki, że $x = F(x)$ (punkt stały funkcji).*

Dowód: pomijamy[2].

3.2 Twierdzenie Peano

3.2.1 Globalne twierdzenie Peano

Jesteśmy już gotowi, aby podać i udowodnić twierdzenie Peano. W ramach wykładu prezentowane były dwa różne dowody tego twierdzenia. My ograniczymy się w tym opracowaniu do pokazania tylko jednego, zdaniem autorów prostszego, dowodu.

Twierdzenie 3.2.1 (Peano)**.** *Załóżmy, że funkcja $f\colon [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Wtedy zagadnienie $(PC),(WP)$ posiada rozwiązanie, dla każdego $t_0 \in [a,b]$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Jest ono określone na $[a,b]$.*

Plan dowodu:

1. Definiujemy przestrzeń X wszystkich funkcji ciągłych $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ i normujemy ją, normą supremum. Takie X jest przestrzenią Banacha.

2. Definiujemy operator $F\colon X \to X$, dany wzorem:

$$(Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

3. Stwierdzamy poprawność definicji tego operatora, oraz jego ciągłość.

4. Pokazujemy, że zbiór wartości operatora stanowią funkcje jednakowo ciągłe i wspólnie ograniczone.

[2]Dowód można znaleźć w internecie: `http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfSchauderFixedPointTheorem.html`.

5. Korzystając z lematu Arzeli–Ascoli, wiemy więc że zbiór wartości jest zbiorem zwartym.

6. Korzystając z tw. Shaudera, wiemy, że nasz operator ma punkt stały.

7. Punkt stały operatora F jest rozwiązaniem równania.

Dowód. 1. Niech $X = C([a,b],\mathbb{R})$ zbiór wszystkich funkcji ciągłych $[a,b] \to \mathbb{R}$. Taki X jest przestrzenią liniową. Wprowadźmy normę:

$$||x|| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|,$$

gdzie $x \in X$. Z tak zdefiniowaną normą, przestrzeń X jest przestrzenią Banacha.

2. Zdefiniujmy operator $F\colon X \to X$ dany wzorem:

$$(Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

F jest poprawnie zdefiniowany. Całka zawsze istnieje ze względu na ciągłość f i ograniczoność argumentu f w prostokącie: $[a,b] \times [x(a), x(b)]$.

3. Należałoby pokazać ciągłość operatora F. Ograniczmy się, do pokazania, że jeśli wartość x zmienimy niewiele, to Fx również nie wiele się zmieni:

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \right|.$$

Zauważmy, że wartość różnicy $f(s,x(s)) - f(s,y(s))$ jest „mała” jeśli x i y różnią się niewiele. Jeśli więc y dąży do x w sensie normy, to $|Fx - Fy|$ dąży do zera.

4. Chcemy pokazać, że zbiór wartości F jest zbiorem zwartym. Pokażemy najpierw że wszystkie jego elementy są wspólnie ograniczone:

$$|(Fx)(t)| = |x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds| \leqslant |x_0| + |\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds| \leqslant$$

$$\leqslant |x_0| + |\int_{t_0}^{t} M ds| \leqslant |x_0| + M(b-a)$$

Gdzie M jest ograniczeniem funkcji f. Mamy więc:

$$|(Fx)(t)| \leqslant |x_0| + M(b-a).$$

Jeśli z obu stron weźmiemy supremum po t, to mamy, zgodnie z definicją naszej normy:

$$||Fx|| \leqslant |x_0| + M(b-a).$$

Wszystkie elementy zbioru wartości F są również jednakowo ciągłe. Niech t oraz τ należą do $[a,b]$, wtedy:

$$|(Fx)(t) - (Fx)(\tau)| = \left| \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds - \int_{t_0}^{\tau} f(s,x(s))ds \right| = \left| \int_{\tau}^{t} f(s,x(s))ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{\tau}^{t} |f(s,x(s))| ds \right| \leqslant \left| \int_{\tau}^{t} |M| ds \right| = M|t-\tau|$$

Czyli mamy:
$$|(Fx)(t) - (Fx)(\tau)| \leqslant M|t - \tau|,$$
co dowodzi jednakowej ciągłości elementów zbioru.

Na mocy lematu Arzeli–Ascoli zbiór wartości F jest zbiorem relatywnie zwartym (zawiera się w zbiorze zwartym), a to już wystarczy aby zastosować twierdzenie Schaudera.

5. Na mocy twierdzenia Schaudera (F spełnia założenia tego twierdzenia) istnieje taka funkcja ciągła $z\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, która spełnia $z = Fz$, czyli $z(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds$.

6. Taka funkcja z jest rozwiązaniem równania i całego zagadnienia, ponieważ:
$$z(t_0) = x_0,$$
$$z'(t) = f(t, z(t)).$$
□

3.2.2 Lokalne twierdzenie Peano

Podamy teraz dowód zmodyfikowanej wersji twierdzenia Peano, w której nie zakładamy już ograniczoności funkcji f. Okazuje się, że wtedy również istnieje rozwiązanie, jednak nie musi ono być określone na całym przedziale $[a, b]$, stąd słowo „lokalne" w nazwie twierdzenia.

Twierdzenie 3.2.2 (Peano – lokalne)**.** *Załóżmy, że $f\colon [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, wtedy istnieje rozwiązanie zagadnienia (PC) określone na[3]: $(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [a, b]$ dla pewnego $\delta > 0$.*

Plan dowodu:

1. Ograniczamy poszukiwania rozwiązania do prostokąta, na którym f jest ograniczona.

2. Określamy nową funkcję $\tilde{f}$, która na tym prostokącie $\equiv f$, a poza nim jest stała i przyjmuje te same wartości co na brzegu.

3. Takie $\tilde{f}$ spełnia założenia globalnego twierdzenia Peano więc $(\tilde{PC}), (WP)$[4] ma rozwiązanie.

4. Pokazujemy, że rozwiązanie to jest dobre także dla $(PC), (WP)$.

Dowód*.* 1. Chcemy ograniczyć poszukiwania rozwiązania do pewnego prostokąta. Czyli f będziemy rozważać na: $[a, b] \times [x_0 - \lambda, x_0 + \lambda]$, dla pewnego $\lambda > 0$. Dla prostoty i bez utraty ogólności, przyjmijmy $\lambda = 1$. Wprowadźmy również oznaczenie:
$$\Omega = [a, b] \times [x_0 - 1, x_0 + 1].$$

[3]Dziedzina rozwiązania ma taką właśnie postać, aby pozbyć się problemów gdy $t_0 = a$ lub $t_0 = b$. Zauważmy bowiem, że dla tych przypadków przedział $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ nie zawiera się w przedziale $[a, b]$ dla żadnego $\delta > 0$.

[4]Przez $(\tilde{PC})$ rozumiemy problem Cauchy'ego w którym po prawej stronie występuje funkcja $\tilde{f}$.

Jeśli rozważymy f na zbiorze Ω to na pewno:

$$\exists_{M>0}\forall_{(t,x)\in\Omega}\ |f(t,x)| \leqslant M,$$

ponieważ f jest ciągła więc jest ograniczona na zbiorze domkniętym.

Niech:

$$A = (\underbrace{[t_0-\delta, t_0+\delta]\cap[a,b]}_{I}) \times [x_0-1, x_0+1],$$

oraz niech: $\delta = \frac{1}{M}$. Przy takich oznaczeniach oczywiście:

$$\forall_{(t,x)\in A}\ |f(t,x)| \leqslant M$$

2. Określamy nową funkcję:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(t,x), & \text{dla } (t,x)\in A \\ f(t,x_0+1), & \text{dla } t\in I,\ x\geqslant x_0+1 \\ f(t,x_0-1), & \text{dla } t\in I,\ x\leqslant x_0-1 \end{cases}$$

z określenia wynika, że:

$$\forall_{t\in I;x\in\mathbb{R}}\left|\tilde{f}(t,x)\right| \leqslant M$$

Rozważać więc będziemy problem Cauchy'ego $(\tilde{PC})$ postaci:

$$\begin{cases} x'(t) = \tilde{f}(t,x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

3. Problem $(\tilde{PC})$ spełnia założenia globalnego twierdzenia Peano. Istnieje więc $z\colon I\to\mathbb{R}$, które jest rozwiązaniem $(\tilde{PC})$ na I.

4. Ponieważ $|z'(t)| = |\tilde{f}(t,z(t))| \leqslant M$, to $(t,z(t))\in A$ dla $t\in I$, czyli

$$z'(t) = f(t,z(t)) \text{ dla } t\in I. \qquad \square$$

Uwaga 3.2.3 (uogólnienia tw. Peano)**.** Można sformułować i udowodnić specjalne wersje tw. Peano:

1. gdy $f\colon (a,b)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

2. dla układów równań – czyli dla funkcji wielowymiarowych.[5]

[5]W tym przypadku dowód przebiega dokładnie tak samo jak w globalnym tw., z tą różnicą, że w odpowiednich miejscach wartość bezwzględną zastępujemy normą.

Rozdział 4

Jednoznaczność rozwiązania – tw. Picarda

4.1 Wprowadzenie

Ten rozdział jest naturalną kontynuacją tematyki z poprzednich rozdziałów, wszystkie oznaczenia pozostają więc niezmienione. Będziemy tutaj dążyli do udowodnienia twierdzenia Picarda, które zawierać będzie warunki jakie mają być spełnione, aby na pewno istniało dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia (w poprzednim rozdziale poznaliśmy warunki na to by istniało jakieś rozwiązanie – jednak nie było pewności że było ono jedyne).

4.2 Twierdzenia pomocnicze

Twierdzenie 4.2.1 (nierówność Gronwall'a)**.** *Załóżmy, że* $u, g\colon [a,b] \to [0,+\infty)$*, są ciągłe oraz* $u(t) \leqslant C + \int_a^t g(s)u(s)ds$*,* $t \in [a,b]$*, dla pewnego* $C \geqslant 0$*. Wtedy:*

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_a^t g(s)ds}, \ t \in [a,b].$$

Plan dowodu:

1. Rozpatrujemy oddzielnie dwa przypadki: $C > 0$ i $C = 0$.
2. Dla $C > 0$ dążymy do udowodnienia oszacowania: $C + \int_a^t g(s)u(s)ds \leqslant Ce^{\int_a^t g(\tau)d\tau}$.
3. W przypadku $C = 0$, stosujemy udowodnioną już część twierdzenia, rozpatrując nierówności, gdzie zamiast stałej C mamy wyrażenie $\frac{1}{n}$. Nierówność musi być prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc do granicy, otrzymujemy natychmiast, że $u \equiv 0$.

Dowód. Załóżmy, że $C > 0$. Nierówność z założeń twierdzenia: $u(t) \leqslant C + \int_a^t g(s)u(s)ds$ pomnóżmy obustronnie przez $\frac{g(t)}{C+\int_a^t g(s)u(s)ds}$. Otrzymujemy:

$$\frac{u(t)g(t)}{C + \int_a^t g(s)u(s)ds} \leqslant g(t).$$

Scałkujmy teraz obustronnie w granicach od a do t:

$$\int_a^t \frac{u(\tau)g(\tau)}{C+\int_a^\tau g(s)u(s)ds}d\tau \leqslant \int_a^t g(\tau)d\tau.$$

W całce po lewej stronie licznik jest pochodną mianownika, mamy więc:

$$\ln\left(C+\int_a^t g(s)u(s)ds\right) - \ln(C) = \ln\left(\frac{C+\int_a^t g(s)u(s)ds}{C}\right) \leqslant \int_a^t g(\tau)d\tau,$$

co daje nam:

$$\frac{C+\int_a^t g(s)u(s)ds}{C} \leqslant e^{\int_a^t g(\tau)d\tau}.$$

Mamy więc:

$$C+\int_a^t g(s)u(s)ds \leqslant Ce^{\int_a^t g(\tau)d\tau},$$

czyli korzystając z założeń twierdzenia:

$$u(t) \leqslant Ce^{\int_a^t g(\tau)d\tau}.$$

Jeżeli natomiast $C = 0$, to zachodzi na pewno:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_+}\ u(t) \leqslant \frac{1}{n} + \int_a^t g(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Dla takiej nierówności możemy skorzystać z udowodnionej już części twierdzenia:

$$u(t) \leqslant \frac{1}{n}e^{\int_a^t g(\tau)d\tau}.$$

Przechodząc do granicy $n \to \infty$ mamy:

$$u(t) \leqslant 0,\ \text{czyli}\ u \equiv 0.$$

□

Twierdzenie 4.2.2 (Banacha o punkcie stałym[1]). *Niech D będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha z normą $||.||$, oraz niech: $F\colon D \to D$, oraz istnieje stała $\lambda \in [0,1)$ taka, że $\forall_{x,y\in D}\ ||Fx - Fy|| \leqslant \lambda||x-y||$. Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\bar{x}$ równania $x = Fx$. Jest ono granicą ciągu $\{\varphi_n\}$ takiego, że $\varphi_0 \in D$, $\varphi_{n+1} = F(\varphi_n)$. Ponadto zachodzi:*

$$||\varphi_n - \bar{x}|| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_0 - F(\varphi_0)||.$$

Plan dowodu:

1. Korzystając z definicji ciągu $\{\varphi_n\}$ podanej w treści twierdzenia, podajemy szacowania na: $||\varphi_n - \varphi_{n-1}||$ oraz $||\varphi_{n+k} - \varphi_n||$.

2. Korzystając z tego co mamy z punktu 1, pokazujemy, że ciąg $\{\varphi_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego.

[1] Twierdzenie nazywane jest również: „zasada Banacha o odwzorowaniach zwężających".

3. A skoro tak, to ze względu na własności zbioru D orzekamy, że ciąg $\{\varphi_n\}$ musi być zbieżny (do granicy którą oznaczamy $\bar{x}$).

4. Pokazujemy, że jeśli $\bar{x}$ jest granicą $\{\varphi_n\}$ to $F\bar{x} = \bar{x}$.

5. Pokazujemy nierówność: $||\varphi_n - \bar{x}|| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_0 - F(\varphi_0)||$.

6. Pokazujemy, że jeśli jakieś z jest rozwiązaniem $Fx = x$ to na pewno $z \equiv \bar{x}$. Czyli jest tylko jedno rozwiązanie równania $Fx = x$.

Dowód. Chcemy pokazać, że ciąg $\{\varphi_n\}$ jest ciągiem Cauchy'ego. W tym celu oszacujemy najpierw różnicę $||\varphi_n - \varphi_{n-1}||$:

$$||\varphi_n - \varphi_{n-1}|| = ||F(\varphi_{n-1}) - F(\varphi_{n-2})|| \leqslant \lambda||\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}|| \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2||\varphi_{n-2} - \varphi_{n-3}|| \leqslant \ldots \leqslant \lambda^{n-1}||\varphi_1 - \varphi_0||.$$

Mamy więc oszacowanie odległości wyrazu n od wyrazu następnego. Aby pokazać, że $\{\varphi_n\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, musimy jednak oszacować, coś więcej, a mianowicie $||\varphi_{n+k} - \varphi_n||$. Zauważmy najpierw, że to wyrażenie można zapisać również w postaci:

$$||(\varphi_{n+k} - \varphi_{n+k-1}) + (\varphi_{n+k-1} - \varphi_{n+k-2}) + \ldots + (\varphi_{n-1} - \varphi_n)||.$$

Z nierówności trójkąt, która zachowana jest również dla normy, mamy więc, że:

$$||\varphi_{n+k} - \varphi_n|| \leqslant ||\varphi_{n+k} - \varphi_{n+k-1}|| + \ldots + ||\varphi_{n-1} - \varphi_n||.$$

Dla wyrażeń znajdujących się z prawej strony nierówności możemy zastosować poprzednie oszacowanie. Mamy więc:

$$||\varphi_{n+k} - \varphi_n|| \leqslant \lambda^{n+k-1}||\varphi_1 - \varphi_0|| + \lambda^{n+k-2}||\varphi_1 - \varphi_0|| + \ldots + \lambda^n||\varphi_1 - \varphi_0||.$$

Prawą stronę można oczywiście zapisać:

$$\lambda^n||\varphi_1 - \varphi_0||(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \ldots + 1).$$

Część tego wyrażenia stanowi sumę skończonego szeregu geometrycznego. Oczywiście wartość takiej sumy będzie mniejsza lub równa od sumy nieskończonej. Mamy więc:

$$||\varphi_{n+k} - \varphi_n|| \leqslant \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i\right) \lambda^n||\varphi_1 - \varphi_0||.$$

Korzystając z wzoru na sumę szeregu geometrycznego nieskończonego, mamy:

$$||\varphi_{n+k} - \varphi_n|| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_1 - \varphi_0||.$$

Ze względu na to, iż $\lambda \in [0, 1)$, mamy[2]:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_1 - \varphi_0|| \leqslant \epsilon.$$

[2]Korzystamy tu z faktu, że $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}$ może być dowolnie małe jeśli n będzie odpowiednio duże.

A stąd dostajemy od razu warunek Cauchy'ego dla ciągu $\{\varphi_n\}$:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{n>N}\forall_{k>0}\ ||\varphi_{n+k}-\varphi_n||\leqslant\epsilon.$$

Przestrzeń D to domknięty podzbiór przestrzeni Banacha, więc $\{\varphi_n\}$ jest zbieżny. Niech $\bar{x}$ będzie granicą $\{\varphi_n\}$ (oczywiście $\bar{x}\in D$).

Pokażemy teraz, że $F\bar{x}=\bar{x}$. Z definicji $\{\varphi_n\}$ mamy: $\varphi_{n+1}=F(\varphi_n)$. Ponadto wiemy, że operator F spełnia warunek Lipschitza. Możemy więc napisać:

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_{n+1}=\lim_{n\to\infty}F(\varphi_n)=F(\lim_{n\to\infty}\varphi_n)$$

czyli rzeczywiście $\bar{x}=F(\bar{x})$.

Teraz pokażemy, że $||\varphi_n-\bar{x}||\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_0-F(\varphi_0)||$. Oczywiście zachodzi:

$$\lim_{k\to\infty}||\varphi_{n+k}-\varphi_n||=||\bar{x}-\varphi_n||,$$

oraz:

$$\forall_{k\in\mathbb{N}}||\varphi_{n+k}-\varphi_n||\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_1-\varphi_0||.$$

Mamy więc:

$$||\bar{x}-\varphi_n||\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_1-\varphi_0||=\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||F(\varphi_0)-\varphi_0||.$$

A to oczywiście daje:

$$||\varphi_n-\bar{x}||\leqslant\frac{\lambda^n}{1-\lambda}||\varphi_0-F(\varphi_0)||.$$

Pozostało jedynie pokazać, że $\bar{x}$ jest jedynym rozwiązaniem równania $Fx=x$. Załóżmy, więc że z jest rozwiązaniem tego właśnie równania. Pokażemy, że wtedy $z\equiv\bar{x}$. Mamy bowiem:

$$||\bar{x}-z||=||F\bar{x}-Fz||\leqslant\lambda||\bar{x}-z||$$
$$(1-\lambda)||\bar{x}-z||\leqslant 0$$

No a skoro $\lambda\in[0,1)$, to $||\bar{x}-z||=0$, czyli $\bar{x}\equiv z$. □

4.3 Twierdzenie Picarda

W ramach wykładu podano dwa alternatywne dowody tego twierdzenia. My ograniczymy się tylko do jednego, zdaniem autorów, łatwiejszego (a na pewno znacznie krótszego).

Twierdzenie 4.3.1 (Picarda – globalne)**.** *Załóżmy, że* $f\colon[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *jest ciągła, oraz istnieje* $L>0$*, takie, że:* $\forall_{t\in[a,b];x,y\in\mathbb{R}}|f(t,x)-f(t,y)|\leqslant L|x-y|$*. Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie zagadnienia* (PC)*. Jest ono określone na* $[a,b]$*.*

Plan dowodu:

1. Definiujemy X - przestrzeń funkcji ciągłych $[a,b]\to\mathbb{R}$ z normą tożsamą normie jednostajnej zbieżności[3]. Przestrzeń X z tą normą, jest przestrzenią Banacha.

[3]Norma $||.||_0$ nazywana jest normą jednostajnej zbieżności, ze względu na to, że jeśli „coś" jest zbieżne w tej normie, to jest to zbieżność jednostajna.

2. Definiujemy operator F w przestrzeni X.

3. Pokazujemy, że spełnione są założenia twierdzenia Banacha.

4. Każdy punkt stały F jest rozwiązaniem rozważanego (PC) – z twierdzenia Banacha wiemy, że jest dokładnie jeden punkt stały, czyli dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. 1. Niech $X := C([a,b],\mathbb{R})$. Zdefiniujmy normę:

$$||x|| = \sup_{t\in[a,b]} |x(t)|e^{-2L|t-t_0|},\ L > 0,\ x \in X.$$

Taka norma jest tożsama z normą zbieżności jednostajnej $||x||_0 = \sup_t |x(t)|$, ponieważ:

$$||x|| \leqslant ||x||_0 \leqslant ||x|| \underbrace{e^{2L|b-a|}}_{=:C}.$$

Oczywiście $C > 1$. Mamy więc:

$$||x_n - x|| \geqslant \frac{1}{C}||x_n - x||_0.$$

Stąd wiadomo, że jeżeli „coś” jest zbieżne do zera w sensie normy $||.||$, to również tak jest w sensie normy$||.||_0$. Oczywiście X z normą $||.||$ jest przestrzenią Banacha.

2. Definiujemy operator $F\colon X \to X$ dany wzorem:

$$(Fx)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

3. Pokażemy, że spełnione są założenia twierdzenia Banacha o punkcie stałym. To znaczy, że istnieje takie $\lambda \in [0,1)$, że $||Fx - Fy|| \leqslant \lambda||x - y||$.

$$||Fy - Fx|| = \sup_t |(Fx)(t) - (Fy)(t)|e^{-2L|t-t_0|} =$$

$$= \sup_t \left|\int_{t_0}^{t} (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))ds\right| e^{-2L|t-t_0|} \leqslant$$

$$\leqslant L \sup_t \left|\int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|ds\right| e^{-2L|t-t_0|} =$$

$$= L \sup_t \left|\int_{t_0}^{t} |x(s) - y(s)|e^{2L|s-t_0|}e^{-2L|s-t_0|}ds\right| e^{-2L|t-t_0|} \leqslant$$

$$\leqslant L||x - y|| \cdot \left|\int_{t_0}^{t} e^{2L|s-t_0|}ds \cdot e^{-2L|t-t_0|}\right| \leqslant$$

$$\leqslant L||x - y||\frac{1}{2L}(e^{2L|t-t_0|} - e^0)e^{-2L|t-t_0|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}||x - y||(1 - e^{-2L|t-t_0|}) \leqslant \frac{1}{2}||x - y||.$$

Mamy więc: $||Fx - Fy|| \leqslant \frac{1}{2}||x - y||$.

Korzystamy z twierdzenia Banacha. Wiemy, że istnieje dokładnie jeden $\bar{x}$ taki, że $\bar{x} = F\bar{x}$. Oczywiście $\bar{x}$ jest rozwiązaniem (PC). Inne rozwiązania (PC) nie istnieją.

□

Uwaga 4.3.2. W dowodzie twierdzenia Picarda, korzystamy z twierdzenia Banacha o punkcie stałym. Twierdzenie to daje nam oszacowanie, o które można rozszerzyć treść twierdzenia Picarda. Dowód takiego, rozszerzonego twierdzenia Picarda pomijamy. Na podstawie zawartych tu informacji można go jednak dość łatwo zbudować.

Twierdzenie 4.3.3 (Picarda – lokalne)**.** *Niech* $f\colon D \to \mathbb{R}$*, będzie funkcją ciągłą, gdzie* $D = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times [x_0 - r, x_0 + r]$*;* $\forall_{(t,x)\in D} |f(t,x)| \leqslant M$*; spełniony jest warunek Lipschitza:* $\exists_{L>0} \forall_{(t,x),(t,y)\in D} |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|$*. Wtedy istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* (PC) *określone na* $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$*, dla* $\alpha = min\{\delta, \frac{r}{M}\}$*.*

Plan dowodu:

1. Definiujemy funkcję rozszerzoną $\tilde{f}$ dla której można będzie stosować twierdzenie globalne.
2. Pokażemy, że $\tilde{f}$ jest „dobra" – spełnia warunek Lipschitza i jest ograniczona.
3. Stosujemy twierdzenie globalne i pokazujemy, że otrzymane rozwiązanie jest dobre także dla (PC).

Dowód. 1. Zdefiniujmy funkcję $\tilde{f}\colon [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \times \mathbb{R}$, dla której zastosujemy globalne tw. Picarda:

$$\tilde{f}(t,x) = \begin{cases} f(t,x) & \text{dla } |x - x_0| \leqslant r, \\ f(t, x_0 + r) & \text{dla } x > x_0 + r, \\ f(t, x_0 - r) & \text{dla } x < x_0 - r. \end{cases} \qquad t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

2. Pokażemy, że $\tilde{f}$ spełnia warunek Lipschitza. Ze względu na sposób definicji funkcji $\tilde{f}$ musimy rozpatrywać różne przypadki (zależnie od tego w jakich przedziałach mieszczą się x i y).

   (a) Gdy $x, y \in [x_0 - r, x_0 + r]$, to:

   $$|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)| = |f(t,x) - f(t,y)| \leqslant L|x-y|.$$

   (b) Gdy $x > x_0 + r$, $|y - x_0| \leqslant r$, to:

   $$|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)| = |f(t, x_0 + r) - f(t,y)| \leqslant L|x_0 + r - y| \leqslant L|x-y|.$$

   (c) Gdy $x < x_0 - r$, $|y - x_0| \leqslant r$, to:

   $$|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)| = |f(t, x_0 - r) - f(t,y)| \leqslant L|x_0 - r - y| \leqslant L|x-y|.$$

   (d) Gdy $x > x_0 + r$, $y < x_0 - r$, to:

   $$|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)| = |f(t, x_0 + r) - f(t, x_0 - r)| \leqslant L2r \leqslant L|x-y|.$$

   (e) Gdy $x, y > x_0 + r$, lub $x, y < x_0 - r$, to:

   $$|\tilde{f}(t,x) - \tilde{f}(t,y)| = |f(t, x_0 \pm r) - f(t, x_0 \pm r)| \leqslant L|x_0 \pm r - x_0 \mp r| = 0 \leqslant L|x-y|.$$

Funkcja $\tilde{f}$ ze względu na to jak jest zdefiniowana, jest ograniczona i to przez tą samą stałą M, co funkcja f.

3. Zgodnie z globalnym twierdzeniem Picarda zagadnienie:

$$(\tilde{PC})\begin{cases} x'(y) = \tilde{f}(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ma rozwiązanie z określone na przedziale $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. Oczywiście zachodzi:

$$|z'(t)| = |\tilde{f}(t, z(t))| \leqslant M.$$

Z twierdzenia o wartości średniej[4]:

$$|z(t) - x_0| = |z'(s)||t - t_0| = |\tilde{f}(s, z(s))||t - t_0| \leqslant M|t - t_0| \leqslant M\alpha.$$

Mamy więc: $|z(t) - x_0| < M\alpha$, czyli $-M\alpha < z(t) - x_0 < M\alpha$, a co za tymi idzie: $-M\alpha + x_0 < z(t) < M\alpha + x_0$. Ze względu na definicję α zachodzi:

$$\forall_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} z(t) \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

albo

$$\forall_{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]} z(t) \in [x_0 - M\delta, x_0 + M\delta].$$

Wynika stąd, zgodnie z definicją funkcji $\tilde{f}$, że: $\tilde{f}(t, z(t)) = f(t, z(t))$. No a skoro tak, to również na pewno zachodzi: $z'(t) = f(t, z(t))$. Czyli z jest rozwiązaniem (PC).

□

Uwaga 4.3.4. Dodatkowo można udowodnić, że rozwiązanie z lokalnego twierdzenia Picarda jest granicą ciągu $\{\varphi_n\}$, określonego wzorem $\varphi_0 \equiv x_0$, $\varphi_{n+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))ds$.

Twierdzenie 4.3.5 (Picarda – uogólnione)**.** *Jeżeli* $f\colon [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, jest ciągła,* $t_0 \in [a, b]$*,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$*, oraz:*

$$\exists_{L>0}\forall_{t\in[a,b];x,y\in\mathbb{R}^n} ||f(t, x) - f(t, y)|| \leqslant L||x - y||,$$

gdzie $||.||$ *jest dowolną normą w* $\mathbb{R}^n$*. Wtedy* (PC) *ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na* $[a, b]$*.*

Dowód. Analogicznie jak globalne twierdzenia Picarda. W odpowiednich miejscach[5] zastępujemy wartość bezwzględną przez normę.

Uwaga 4.3.6. W następnych rozdziałach często będziemy się odwoływać (czasem niejawnie) do twierdzenia Picarda dla funkcji określonych na $\mathbb{R}^n$.

---

[4]Twierdzenie było podane na wykładzie „Analiza Matematyczna I”.

[5]Odpowiednie miejsca to takie, w których w wejściowym dowodzie odnosiliśmy się do liczb, które tutaj stają się wektorami.

Rozdział 5

Równanie liniowe wyższego rzędu

5.1 Wprowadzenie

Rozważać będziemy zagadnienia postaci:

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) + p_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)y'(t) + p_n(t)y(t) = b(t) \\ y(t_0) = x_{01},\ y'(t_0) = x_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = x_{0n} \end{cases}$$

Takie zagadnienie sprowadza się do układu równań liniowych[1] i ma dokładnie jedno rozwiązanie[2].

Używać będziemy oznaczeń: (LJ) – równanie liniowe jednorodne (tzn. $b(t) \equiv 0$), (LN) – równanie liniowe niejednorodne.

5.1.1 Sprowadzanie równania liniowego do układu równań

Pokażemy teraz, jak z równania liniowego wyższego rzędu, otrzymać układ równań liniowych (rzędu pierwszego).

Niech:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = y'(t) \\ x_3(t) = y''(t) \\ \vdots \\ x_n(t) = y^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

No ale wtedy możemy napisać również:

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = y_n(t) = b(t) - p_n(t)x_1(t) - p_{n-1}(t)x_2(t) - \cdots - p_1(t)x_n(t) \\ x_j(t_0) = x_{0j}, \text{dla } j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

[1] Więcej o układach równań liniowych można przeczytać w następnym rozdziale.

[2] Układ równań liniowych ma, przy spełnieniu odpowiednich założeń, jedno rozwiązanie. Wynika to z udowodnionych wcześniej twierdzeń Peano i Picarda, które można uogólnić dla równań wyższego rzędu.

Jest to układ równań liniowych, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{bmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -p_n & -p_{n-1} & \cdots & \cdots & -p_1 \end{bmatrix}}_{A(t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}}_{b(t)}$$

Czyli jest to macierzowe równanie postaci:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t).$$

5.1.2 Liniowa niezależność funkcji

Definicja 5.1.1 (układ funkcji liniowo niezależnych)**.** Układ funkcji $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ nazywamy liniowo niezależnym, jeżeli:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) \equiv 0 \Rightarrow \forall_j c_j = 0$$

Fakt 5.1.2. *Jeżeli* $\exists_{1 \leqslant k \leqslant n}\ \varphi_k = \sum_{j \neq k} \alpha_j \varphi_j$*, to* $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *jest liniowo zależny.*

Definicja 5.1.3 (macierz Wrońskiego i wrońskian)**.** Macierzą Wrońskiego układu funkcji $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$ nazywamy macierz:

$$\Phi[\varphi_1, \cdots, \varphi_n](t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ & \vdots & \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

Natomiast $\det \Phi(t)$ nazywamy wyznacznikiem Wrońskiego lub wrońskianem. Wrońskian będziemy często oznaczać przez $W(t)$ lub $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t)$.

Twierdzenie 5.1.4. *Jeżeli układ funkcji* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *jest liniowo zależny to ich wrońskian jest równy zero dla wszystkich argumentów z dziedziny.*

Plan dowodu:

1. Z założenia, że funkcje φ_i są liniowo zależne otrzymujemy układ równań.

2. Na mocy twierdzenia Cramera układ ten musi mieć wyznacznik główny równy zero.

3. Wyznacznik ten okazuje się wrońskianem.

Dowód. Skoro $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są liniowo zależne, to

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) = 0.$$

Różniczkujemy powyższą równość $n-1$ razy i otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(t) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j^{(n-1)}(t) = 0 \end{cases}$$

Układ ten ma na pewno zerowe rozwiązanie, ale z tego że $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są zależne wiemy też, że musi mieć rozwiązanie niezerowe, a co za tym idzie tych rozwiązań musi być nieskończenie wiele. Więc $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = 0$. □

5.2 Równanie liniowe jednorodne

Twierdzenie 5.2.1. *Załóżmy, że współczynniki w równaniu liniowym jednorodnym* (LJ) *są ciągłe na* $[a, b]$*, oraz* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *stanowią liniowo niezależny układ rozwiązań* (LJ)*. Wtedy wrońskian* $W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \neq 0$ *dla wszystkich* $t \in [a, b]$*.*

Plan dowodu:

1. Zakładamy, że wrońskian zeruje się w jakimś $t_0 \in [a, b]$.
2. Budujemy nową funkcję φ będącą niezerową kombinacją liniową funkcji $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Zakładamy, że stałe $c_1, c_2, \ldots, c_n$ są jakimś niezerowym rozwiązaniem układu $\Phi(t_0)c = \theta$. Ze względu na to, że $\det \Phi(t_0) = 0$ istnieje nieskończenie wiele takich układów stałych.
3. Taka funkcja φ jest również rozwiązaniem (LJ).
4. Zauważamy, że $\forall_{i=0,\ldots,n-1}\ \varphi^{(i)}(t_0) = 0$.
5. Wynika stąd, że $\varphi \equiv 0$ co jest sprzeczne z poprzednią definicją φ (tzn. $c_j = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, a założyliśmy, że tak nie jest)
6. Wnioskujemy, że wrońskian nie może się zerować.

Dowód. Załóżmy przeciwnie, że $\exists_{t_0 \in [a,b]}\ W(t_0) = 0$, przy spełnionych założeniach twierdzenia. Rozważmy funkcję $\varphi = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j$, gdzie $c = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$ jest jakimś niezerowym rozwiązaniem $\Phi(t_0)c = \theta$. Ze względu na to, że $W(t_0) = 0$, na pewno da się znaleźć takie rozwiązanie. Funkcja φ jest oczywiście rozwiązaniem[3] (LJ). Skoro jednak $\Phi(t_0)c = \theta$, to mamy:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(t_0) + c_2\varphi_2(t_0) + \ldots + c_n\varphi_n(t_0) = 0 \\ c_1\varphi_1'(t_0) + c_2\varphi_2'(t_0) + \ldots + c_n\varphi_n'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(n-1)}(t_0) + c_2\varphi_2^{(n-1)}(t_0) + \ldots + c_n\varphi_n^{(n-1)}(t_0) = 0 \end{cases}$$

czyli: $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \ldots = \varphi^{n-1}(t_0) = 0$. No ale z jednoznaczności rozwiązania $(LJ), (WP)$ wiemy, że tylko jedna funkcja $\varphi \equiv 0$ spełnia taki warunek. To świadczyłoby

[3]Liniowa kombinacja rozwiązań jest na pewno rozwiązaniem – ze względu na liniowość pochodnej i jednorodność równania.

o tym, że $\forall_j c_j = 0$, co jest sprzeczne z poprzednim założeniem, a w rezultacie jest to sprzeczne z tym, że $W(t_0) = 0$ (okazuje się bowiem, że musi istnieć dokładnie jedno rozwiązanie $\Phi(t_0)c = \theta$, czyli rozwiązanie zerowe: $c = \theta$). □

Definicja 5.2.2 (układ fundamentalny rozwiązań (LJ))**.** Układ liniowo niezależnych rozwiązań $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ równania (LJ) nazywamy układem fundamentalnym rozwiązań równania (LJ).

Twierdzenie 5.2.3 (o istnieniu układu fundamentalnego)**.** *Jeżeli współczynniki p_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ są funkcjami ciągłymi, to istnieje układ fundamentalny rozwiązań równania (LJ).*

Plan dowodu:

1. Rozpatrujemy równanie (LJ) z n - różnymi warunkami początkowymi.
2. Każdy takie zagadnienie ma dokładnie 1 rozwiązanie
3. Okazuje się, że rozwiązania te są liniowo niezależne (ze względu na dobór warunków początkowych).

Dowód. Rozpatrzmy równanie (LJ):

$$y^{(n)}(t) + p_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)y'(t) + p_n(t)y(t) = 0$$

i n różnych warunków Cauchy'ego postaci:

$$y(t_0) = 0, \ldots, y^{(j-1)}(t_0) = 0, y^{(j)}(t_0) = 1, y^{(j+1)}(t_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

dla $j = 0, 1, \cdots, n$. Z jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego wiemy, że równanie z każdym z tych warunków ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Niech więc funkcje $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ będą tymi rozwiązaniami. Wówczas:

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Czyli $\exists_{t_0}\ W(t_0) \neq 0 \quad \Rightarrow$ układ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ jest układem rozwiązań (LJ) liniowo niezależnym, czyli jest to układ fundamentalny. □

Uwaga 5.2.4. Różnych układów fundamentalnych (dla danego równania) jest tyle ile macierzy kwadratowych nieosobliwych[4].

Twierdzenie 5.2.5. *Jeżeli wrońskian układu funkcji $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C^n[a, b]$ jest różny od zera na $[a, b]$, to istnieje dokładnie jedno równanie (LJ) dla którego układ ten jest układem fundamentalnym.*

[4]Macierz kwadratowa nieosobliwa, to macierz o wyznaczniku różnym od zera. Takich macierzy jest ∞ wiele.

Plan dowodu:

1. Szukamy $p_j(t)$ takich, by były to współczynniki równania (LJ) którego rozwiązaniami są $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$.

2. Otrzymujemy układ równań z niewiadomymi p_j, który ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód. Szukamy współczynników $p_j(t)$ równania (LJ). Dla $i = 1, \ldots, n$ spełnione jest:

$$p_1(t)\varphi_i^{(n-1)}(t) + \ldots + p_{n-1}(t)\varphi_i'(t) + p_n(t)\varphi_i(t) = -\varphi_i^{(n)}(t).$$

Definiujemy w ten sposób układ równań, gdzie niewiadomymi są $p_j(t)$. Macierz główna tego układu ma postać:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_1^{n-1}(t) \\ \varphi_2(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_2^{n-1}(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_n(t) & \varphi_n'(t) & \cdots & \varphi_n^{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

Jest to transponowana macierz Wrońskiego układu funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Wiemy też, że wrońskian jest różny od zera, dla każdego t. Ponieważ wyznacznik macierzy równy jest wyznacznikowi macierzy transponowanej, to, nasz układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wybór współczynników p_j jest więc jednoznaczny. $\square$

Lemat 5.2.6 (pochodna iloczynu n-funkcji)**.** *Jeśli funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są różniczkowalne, to zachodzi wzór:*

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)' = \sum_{j=1}^{n} f_1 f_2 \ldots f_{j-1} f_j' f_{j+1} \ldots f_i.$$

Fakt 5.2.7 (pochodna wyznacznika macierzy)**.** *Niech będzie dana macierz kwadratowa $A(t) = [a_{ij}(t)]_{i,j=1,\ldots,n}$. Wówczas:*

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} W_k(t),$$

gdzie $W_k(t)$ oznacza wyznacznik macierzy, która powstała z macierzy A przez zastąpienie k-tego wiersza jego pochodnymi.

Dowód. Twierdzenia wynika wprost z zastosowania wzoru na pochodną iloczynu, dla wyznacznika rozpisanego z definicji[5]:

$$W'(t) = \frac{d}{dt}(\sum_p (-1)^{|p|} a_{1p(1)} a_{2p(2)} \ldots a_{np(n)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_p (-1)^{|p|} a_{1p(1)} \ldots a_{k-1p(k-1)} a'_{kp(k)} a_{k+1p(k+1)} \cdots a_{np(n)} = \sum_{k=1}^{n} W_k(t)$$

$\square$

[5]Stosujemy tu jedną z możliwych definicji wyznacznika macierzy. Więcej na ten temat można przeczytać w notatkach do wykładu z Algebry Liniowej.

Twierdzenie 5.2.8 (Liouville'a dla równania liniowego)**.** *Jeżeli* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *stanowi układ rozwiązań równania* (LJ)*, to:*

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds}$$

Plan dowodu:

1. Liczymy $W'(t)$.
2. Budujemy równanie tożsame z (LJ).
3. Porównujemy odpowiednie współczynniki (a właściwie tylko jeden z nich) co daje nam tezę.

Dowód*.* Niech $W(t)$ będzie wrońskianem dla $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Jego pochodna ma postać:

$$W'(t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(t) = W_n(t),$$

gdzie $W_n(t)$ to wyznacznik macierzy Wrońskiego w której ostatni wiersz został zastąpiony przez pochodne tego wiersza[6]. Rozpatrzmy teraz równanie:

$$(*) \quad \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) & z(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) & z'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_1^{(n)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n)}(t) & z^{(n)}(t) \end{vmatrix} = 0$$

„Rozwijając" wyznacznik z powyższego równania względem ostatniej kolumny, zgodnie z wzorem Laplace'a otrzymujemy:

$$\frac{1}{W(t)} \Big((-1)^{2(n+1)} W(t) z^{(n)}(t) + (-1)^{2(n+1)-1} W'(t) z^{(n-1)}(t) + \dots \Big) = 0.$$

Co można zapisać prościej:

$$z^{(n)}(t) - \frac{W'(t)}{W(t)} z^{(n-1)} + \dots = 0$$

Ponadto zauważmy, że funkcje $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ spełniają równanie $(*)$. Wobec tego równanie (LJ) i $(*)$ są tymi samymi równaniami, a co za tym idzie odpowiednie współczynniki muszą być takie same. W szczególności mamy:

$$p_1(t) = -\frac{W'(t)}{W(t)}$$

Całkując obustronnie mamy:

$$-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds = \ln|W(t)| - \ln|W(t_0)|$$

[6] Równość taka zachodzi, ponieważ dla $j = 1, 2, \dots, n-1$ wyznacznik $W_j = 0$. Dzieje się tak ze względu na definicję macierzy Wrońskiego oraz własność wyznacznika. Wyznacznik równy jest zero m.in. wtedy gdy w macierzy są dwa takie same wiersze, a taka sytuacji zachodzi właśnie w tym przypadku.

$$\ln\left|\frac{W(t)}{W(t_0)}\right| = -\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds$$

No a stąd mamy:

$$\left|\frac{W(t)}{W(t_0)}\right| = e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds}.$$

Wartość bezwzględną możemy opuścić, bo $W(t)$ ma stały znak[7] wobec czego iloraz $\frac{W(t)}{W(t_0)}$ jest zawsze dodatni. Czyli:

$$W(t) = W(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t} p_1(s)ds}.$$

□

5.3 Równanie liniowe niejednorodne

Twierdzenie 5.3.1 (postać ogólnego rozwiązania (LN))**.** *Jeżeli ψ jest rozwiązaniem (LN), a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ układem fundamentalnym (LJ), to każde rozwiązanie (LN) wyraża się jednoznacznie wzorem:*

$$(1) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)\right) + \psi(t).$$

Plan dowodu:

1. Sprawdzamy, czy wzór (1) opisuje rozwiązanie, tzn. czy spełnia (LN) – wstawiamy do równania.

2. Sprawdzamy, czy dowolne rozwiązanie (LN) daje się zapisać wzorem (1) – tzn. wyznaczamy stałe c_i dla danego dowolnego rozwiązania.

Dowód. Wstawmy więc wzór (1) do równania (LN), aby przekonać się, iż istotnie jest to rozwiązanie:

$$\sum_{j=0}^{n} p_{(n-j)}(t)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k^{(j)}(t) + \psi^{(j)}(t)\right) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{j=0}^{n} p_{(m-j)}(t)\varphi_k^{j}(t)}_{=0} +$$

$$+\sum_{j=0}^{n} p_{(n-j)}(t)\psi^{(j)}(t) = f(t)$$

Pierwszy składnik sumy w drugiej równości zeruje się, ze względu na to że funkcje $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ stanowią układ fundamentalny (LJ). Rzeczywiście więc, każda funkcja dająca wyrazić się wzorem (1) jest rozwiązaniem (LN).

Pokażemy teraz, że każde rozwiązanie (LN) daje się na pewno wyrazić wzorem (1). Niech z będzie pewnym rozwiązaniem (LN). Dobierzemy stałe c_i tak aby wzór (1) wyrażał z.

[7]Ma stały znak bo się nie zeruje, jest ciągły i określony na przedziale $[a, b]$.

Skoro wzór (1) ma wyrażać funkcję z to możemy napisać:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) = z(t) - \psi(t).$$

To daje nam jedno równanie, gdzie niewiadomymi są współczynniki c_j. Potrzebujemy więc jeszcze $n-1$ równań. Otrzymujemy je przez kolejne różniczkowanie tego równania:

$$(*) \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j(t) = z(t) - \psi(t) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j'(t) = z'(t) - \psi'(t) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j^{(n-1)}(t) = z^{(n-1)}(t) - \psi^{(n-1)}(t) \end{cases}$$

Teraz $(*)$ opisuje c_j - ale w zależności od t. A chcemy, aby c_j były stałymi. Ustalmy więc $t = t_0$.

Niech:

$$\chi(t) = \sum_{j=i}^{n} c_j \varphi_j(t) + \psi(t),$$

gdzie c_j to rozwiązania $(*)$ dla ustalonego $t = t_0$. Wystarczy pokazać, że $z(t) \equiv \chi(t)$.

Wiemy, żez i χ to na pewno rozwiązania (LN)[8]. Skorzystajmy więc z warunków początkowych:

$$\chi(t_0) = z(t_0),\ \chi'(t_0) = z'(t_0), \cdots,\ \chi^{(n-1)}(t_0) = z^{(n-1)}(t_0) \qquad \text{(z definicji } \chi\text{)}.$$

Z jednoznaczności rozwiązania wiemy, że tylko jedna funkcja może spełniać takie ustalone warunki, więc na pewno $\chi \equiv z$, czyli wiemy już, że dla każdego, dowolnie wybranego rozwiązania z, jesteśmy w stanie wybrać takie stałe c_j, żeby wzór (1) wyrażał to wybrane rozwiązanie z. Czyli każdego rozwiązanie wyraża się wzorem (1). □

5.3.1 Metoda uzmienniania stałej

Opiszemy tutaj metodę rozwiązywania równań liniowych niejednorodnych, która jest skuteczna o ile znamy układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego.

Niech $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ stanowią układ fundamentalny (LJ). Chcemy znaleźć jedną funkcję $\psi(t)$, będącą rozwiązaniem (LN), bo zgodnie z ostatnim twierdzeniem, to wystarczy aby znać wszystkie rozwiązania (LN). Będziemy szukać funkcji postaci:

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) \varphi_j(t).$$

Potrzebujemy oczywiście znaleźć odpowiednią ilość zależności między ψ a c_j. Wejściowe równanie będziemy więc kolejno różniczkować:

$$\psi'(t) = \sum_{j=1}^{n} (c_j'(t) \varphi_j(t) + c_j(t) \varphi_j'(t)).$$

Istnieje bardzo wiele układów c_j które spełniają powyższe równania. Nam potrzebny jest tylko jeden,dodajemy więc dodatkowy warunek:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t) \varphi_j(t) = 0,$$

[8]Można to łatwo pokazać, wstawiając χ do wzoru.

i ponownie różniczkujemy:

$$\psi''(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j'(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j''(t).$$

Podobnie jak poprzednio dodajmy kolejny warunek:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j'(t) = 0.$$

Postępowanie to powtarzamy kolejna, aż do otrzymania równania:

$$\psi^{(n-1)}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-2)}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(n-1)}(t),$$

z warunkiem:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-2)}(t) = 0.$$

Mamy więc:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(k)}(t) = 0, \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n-2$$

oraz:

$$\psi^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(k)}(t), \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ostatnie równanie (dla $k = n-1$) jeszcze raz różniczkujemy:

$$\psi^{(n)}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(n)}(t).$$

Wstawimy teraz ψ do równania (LN), które możemy zapisać w postaci:

$$\underbrace{\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \psi^{(n-\mu)}(t)}_{L} = \underbrace{f(t)}_{P}, \quad p_0(t) = 1.$$

Skorzystajmy teraz z warunków które otrzymaliśmy przez kolejne różniczkowanie ψ oraz dodawanie kolejnych warunków:

$$L = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(n)}(t)}_{p_0\cdot\psi^{(n)}} + \sum_{\mu=1}^{n} p_\mu \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(n-\mu)}(t)}_{\psi^{(n-\mu)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) + \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\varphi_j^{(n-\mu)}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} c_j(t) \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \varphi_j^{(n-\mu)}(t)}_{=0,\ \text{bo } \varphi_j \text{ rozw. } (LJ)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) =^{(*)} f(t) = P$$

Równość $(*)$ wynika z tego, że ψ ma spełniać równanie (LN). Otrzymaliśmy więc dodatkowy warunek:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = f(t).$$

Wystarczy więc teraz rozwiązać:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(k)}(t) = 0, \quad \text{dla } k = 0, 1, \ldots, n-2 \\ \sum_{j=1}^{n} c_j'(t)\varphi_j^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases}$$

Jest to układ równań, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z definicją $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, wyznacznik macierzy tego układu nie zeruje się, czyli istnieje rozwiązanie, które można otrzymać stosując wzory Cramera. W ten sposób wyliczamy c_j', a następnie całkując otrzymujemy szukane c_j. □

W praktyce stosowanie tej metody sprowadza się oczywiście jedynie do rozwiązania otrzymanego układu równań i scałkowaniu otrzymanych c_j'. Prezentowanego tutaj rozumowania nie trzeba powtarzać przy rozwiązywaniu zadań – jest to raczej uzasadnienie poprawności i skuteczności metody.

5.4 Równania liniowe o stałych współczynnikach

Rozważać będziemy tutaj równanie postaci:

$$\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu z^{(n-\mu)}(t) = 0, \quad p_0 = 1,$$

które będziemy oznaczać często przez (LS).

5.4.1 Wielomian charakterystyczny

Jedynym z podstawowych pojęć jakie wprowadzimy w tym dziale, jest pojęcie wielomianu charakterystycznego równania. Zamiast podawać formalną definicję, tego wielomianu, pokażemy intuicyjny sens tego pojęcia.

Sprawdźmy dla jakich λ funkcje $e^{\lambda t}$ są rozwiązaniami równania. Wstawiamy $e^{\lambda t}$ do równania:

$$\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \lambda^{n-\mu} e^{\lambda t} = 0.$$

Obie strony tego równania możemy teraz podzielić przez $e^{\lambda t}$, otrzymujemy:

$$\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \lambda^{n-\mu} = 0.$$

Właśnie taki wielomian będziemy nazywać wielomianem charakterystycznym równania (LS).

Po przeprowadzeniu tego prostego rozumowania, fakt który podamy niżej, jest oczywisty.

Fakt 5.4.1. *Jeżeli λ jest pierwiastkiem wielomianu $p(z) = \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu z^{n-\mu}$, to $e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem (LS).*

Twierdzenie 5.4.2 (układ fundamentalny równania (LS))**.** *Jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są pierwiastkami wielomianu charakterystycznego p, to układ $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ stanowi układ fundamentalny rozwiązań równania (LS), jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ są parami różne ($\forall_{i\neq j} \lambda_i \neq \lambda_j$).*

Dowód. Wiemy już, z poprzedniego faktu, że rozpatrywane funkcje są rzeczywiście rozwiązaniami równania (LS). Wystarczy pokazać ich liniową niezależność. Pokażemy że wrońskian tych funkcji nie zeruje się dla $t = 0$. A skoro jest to wrońskian układu rozwiązań, który nie zeruje się w jednym punkcie, to na pewno nie zeruje się w żadnym punkcie.

Policzmy więc wrońskian układu funkcji $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ dla $t = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

Okazuje się więc, że funkcje $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ to liniowo niezależny układ rozwiązań - czyli układ fundamentalny. □

Lemat 5.4.3 (wzór Leibnitza)**.** *Niech funkcje f, g będą k-krotnie różniczkowalne, wtedy:*

$$(f(t)g(t))^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)}(t) g^{(k-j)}(t).$$

Dowód. można znaleźć w notatkach do wykładu „Analiza I".

Twierdzenie 5.4.4. *Jeżeli λ jest m-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego, to funkcja $t^s e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem równania (LS) dla $s = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Dowód. Korzystając z wzoru Leibnitza, policzymy pochodne $(t^s e^{\lambda t})^{(k)}$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, aby następnie wstawić je do równania (LS):

$$(t^s e^{\lambda t})^{(k)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (t^s)^{(k)} \lambda^{k-j} e^{\lambda t} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{s!}{(s-k)!} t^{s-k} \lambda^{k-j} e^{\lambda t}$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że:

$$(*) \quad (t^s)^{(k)} = s(s-1)\cdots(s-k+1) t^{s-k} = \frac{s!}{(s-k)!} t^{s-k}.$$

Wstawiamy teraz $t^s e^{\lambda t}$ do równania (LS):

$$\sum_{\mu=0}^{n} p_\mu (t^s e^{\lambda t})^{(n-\mu)} = \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \sum_{j=0}^{n-\mu} \binom{n-\mu}{j} \frac{s!}{(s-j)!} t^{s-j} \lambda^{n-\mu-j} e^{\lambda t}.$$

Zamieńmy kolejność sumowania w wyrażeniu z prawej strony:

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-j} p_\mu \binom{n-\mu}{j} \frac{s!}{(s-j)!} t^{s-j} \lambda^{n-\mu-j} e^{\lambda t}.$$

Wyrażenie $e^{\lambda t}$ w ogóle nie zależy od indeksów sumowania można więc wyciągnąć je na początek, natomiast to co nie zależy od μ wyciągamy przed drugą sumę:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{s!}{(s-j)!} t^{s-j} \sum_{\mu=0}^{n-j} p_\mu \binom{n-\mu}{j} \lambda^{n-\mu-j}.$$

Rozpisując symbol Newtona, można wyciągnąć $\frac{1}{j!}$ przed drugą sumę:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \frac{s!}{(s-j)!} t^{s-j} \frac{1}{j!} \sum_{\mu=0}^{n-j} p_\mu \frac{(n-\mu)!}{(n-\mu-j)!} \lambda^{n-\mu-j}.$$

Wyrażenie za pierwszą sumą można zapisać prościej, jako symbol Newtona $\binom{s}{j}$. W wyrażeniu znajdującym się za drugim znakiem sumowania korzystamy z wzoru $(*)$:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} t^{s-j} \sum_{\mu=0}^{n-j} p_\mu \frac{d^j}{d\lambda^j} (\lambda^{n-\mu}).$$

Symbol $\frac{d^j}{d\lambda^j}$ możemy wyciągnąć przed drugą sumę:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} t^{s-j} \frac{d^j}{d\lambda^j} \sum_{\mu=0}^{n-j} p_\mu \lambda^{n-\mu}.$$

Zauważmy, że zachodzi:

$$\frac{d^j(\lambda^{n-\mu})}{d\lambda^j} = 0, \text{ dla } \mu > n-j.$$

Możemy więc rozszerzyć zakres drugiej sumy (bo wartość się nie zmieni):

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} t^{s-j} \frac{d^j}{d\lambda^j} \sum_{\mu=0}^{n} p_\mu \lambda^{n-\mu}.$$

Druga suma przedstawia teraz wielomian charakterystyczny. Czyli otrzymujemy tam j-tą pochodną tego wielomianu:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} t^{s-j} p^{(j)}(\lambda).$$

Oczywiście zachodzi:

$$\binom{s}{j} = 0, \text{ dla } s < j.$$

Możemy więc ograniczyć zakres sumy:

$$e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} t^{s-j} p^{(j)}(\lambda) = 0.$$

Ostatnia równość wynika z własności krotności pierwiastka wielomianu[9]. Wszystkie pochodne $p^{(j)}(\lambda)$ dla $j = 0, 1, \ldots, s$ równe są zero, tak więc całe wyrażenie równe jest zero. Czyli rozpatrywana funkcja rzeczywiście spełnia równanie (LS). $\square$

Uwaga 5.4.5. Jeżeli λ jest m-krotnym pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego p, to $Q(t)e^{\lambda t}$ jest rozwiązaniem (LS) dla dowolnego wielomianu Q, takiego, że st. $Q < m$.

Twierdzenie 5.4.6. *Jeżeli $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ są pierwiastkami równania charakterystycznego p, $\lambda_i \neq \lambda_j$, dla $i \neq j$, oraz λ_j ma krotność m_j, to $\sum_{j=1}^{r} Q_j(t)e^{\lambda_j t}$ jest rozwiązaniem ogólnym równania (LS) gdzie Q_j jest wielomianem takim, że* st. $Q_j < m_j$.

Plan dowodu: Pokażemy, że układ funkcji $\{t^s e^{\lambda_j t}\}_{s=0,1,\ldots,m_j-1}^{j=1,\ldots,r}$ jest liniowo niezależny. Zbudujemy kombinację liniową i wprost, poprzez różniczkowanie, dojdziemy do tego iż musiała to być kombinacja zerowa.

Dowód. Załóżmy, że:

$$\sum_{j=1}^{r} Q_j(t)e^{\lambda_j t} \equiv 0,$$

gdzie st. $Q_j = m_j - 1$. Podzielmy teraz obie strony przez $e^{\lambda_1 t}$:

$$(*) Q_1(t) + \sum_{j=2}^{r} Q_j(t)e^{(\lambda_j - \lambda_1)t} \equiv 0.$$

Zauważmy, że dla dowolnego wielomianu Q i $\lambda \neq 0$ zachodzi: $(Q(t)e^{\lambda t})' = P(t)e^{\lambda t}$, gdzie st. $P =$ st. Q, ponieważ:

$$(Q(t)e^{\lambda t})' = Q'(t)e^{\lambda t} + \lambda Q e^{\lambda t} = e^{\lambda t}\underbrace{(\lambda Q + Q'(t))}_{P(t)}.$$

Więc jeśli zróżniczkujemy naszą równość $(*)$, m_1-krotnie, otrzymamy:

$$\sum_{j=2}^{r} Q_{j,1}(t)e^{(\lambda_j - \lambda_1)t} \equiv 0,$$

gdzie st. $Q_{j,1} =$ st. Q_j.

Rozumowanie powtarzamy:

$$Q_{2,1} + \sum_{j=3}^{r} Q_{j,1}(t)e^{(\lambda_j - \lambda_2)t} \equiv 0 \ / \frac{d^{m_2}}{dt^{m_2}}$$

$$\sum_{j=3}^{r} Q_{j,2}(t)e^{(\lambda_j - \lambda_2)t} \equiv 0,$$

aż do momentu gdy otrzymamy:

$$Q_{r,r-1}(t)e^{(\lambda_r - \lambda_{r-1})t} \equiv 0.$$

[9] Własność ta mówi, że jeśli jakaś liczba λ, jest pierwiastkiem dowolnego wielomianu W, krotności m, to na pewno $W^{(j)}(\lambda) = 0$ dla $j = 0, 1, \ldots, m-1$, oraz $W^{(m)}(\lambda) \neq 0$. Własność tą można przyjąć wręcz za definicję krotności pierwiastka wielomianu.

Stąd mamy $Q_{r,r-1}(t) \equiv 0$, a skoro st. $Q_{r,r-1} =$ st. Q_r, to $Q_r(t) \equiv 0$.

Wejściowa równość wobec tego ma postać:

$$\sum_{j=1}^{r-1} Q_j(t)e^{\lambda_j t} \equiv 0.$$

Możemy teraz powtórzyć całe rozumowanie od początku dla otrzymanej równości i pokazać, że $Q_{r-1}(t) \equiv 0$ itd. Reasumując okazuje się, że $\forall_{j=0,\dots,r-1} Q_j \equiv 0$, czyli układ jest liniowo niezależny. $\square$

Rozdział 6

Układ równań liniowych

6.1 Wprowadzenie

O układach równań była już mowa w rozdziale poprzednim, oraz przy okazji twierdzeń Peano i Picarda. Jak wiemy, układy równań są ściśle związane z równaniami liniowymi wyższego rzędu. Znamy też warunki jakie muszę być spełnione aby istniało rozwiązanie układu, oraz aby było jednoznaczne.

W rozdziale tym powiemy coś więcej na temat rozwiązania układu oraz szczególnie na temat jego postaci. Podamy również praktyczną metodę rozwiązywania układów równań o stałych współczynnikach.

6.1.1 Oznaczenia

Aby oznaczyć układ równań będziemy stosować następujące zapisy:

$$\begin{array}{ll} (UN) & x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ (UJ) & x'(t) = A(t)x(t), \end{array}$$

które należy rozumieć w następujący sposób:

$$(UN) \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{n1}(t) \\ a_{12}(t) & \dots & a_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix}$$

6.2 Układ jednorodny

6.2.1 Układ fundamentalny rozwiązań

Fakt 6.2.1. *Jeżeli $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ są rozwiązaniami (UJ), to $c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k$ jest rozwiązaniem (UJ) dla dowolnych stałych $c_1, c_2, \dots, c_k$.*

Dowód. oczywisty, wynika z liniowości pochodnej. Oczywiście rozwiązania o których mowa w fakcie, są funkcjami wektorowymi.

Definicja 6.2.2 (macierz Wróńskiego i wrońskian funkcji wielowymiarowych)**.** Załóżmy, że mamy dany układ funkcji $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$. Wtedy macierz:

$$\phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & \cdots & \varphi_{nn}(t) \end{bmatrix} = [\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)]$$

nazywamy macierzą Wrońskiego, a jej wyznacznik $\det \phi(t) = W(t)$ wrońskianem układu funkcji $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Definicja 6.2.3 (układ fundamentalny i macierz fundamentalna)**.** Układ rozwiązań (UJ): $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ nazywamy układem fundamentalnym jeśli $\det \phi(t) \not\equiv 0$. Macierz $[\varphi_1, \ldots, \varphi_n]_{n\times n}$ nazywamy wtedy macierzą fundamentalną.

Twierdzenie 6.2.4 (Liouville'a dla funkcji wielowymiarowych)**.** *Niech $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ będzie układem fundamentalnym rozwiązań (UJ), wtedy:*

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr} A(s) ds}.$$

Gdzie $\mathrm{tr}A(s)$ (ślad macierzy) to suma wyrazów na przekątnej macierzy $A(s)$, czyli $\mathrm{tr}A(s) = \sum_{i=0}^{n} a_{ii}(s)$.

Plan dowodu: Cały dowód opiera się na wzorze na pochodną wyznacznika (podanym w rozdziale o równaniach liniowych wyższego rzędu) oraz na własnościach wyznacznika.

Dowód. Wiemy, iż zachodzi wzór $(W(t))' = \sum_{j=1}^{n} W_j(t)$, gdzie:

$$W_j = \begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \ldots & \varphi_{n,1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1,j-1}(t) & \ldots & \varphi_{n,j-1}(t) \\ \varphi'_{1,j}(t) & \ldots & \varphi'_{n,j}(t) \\ \varphi_{1,j+1}(t) & \ldots & \varphi_{n,+1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{1,n}(t) & \ldots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix}$$

Z tego, że φ_j jest rozwiązaniem (UJ) możemy zapisać, że:

$$\varphi'_k(t) = A(t)\varphi_k(t),$$

a stąd:

$$\varphi'_{k,j}(t) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{j\mu}(t)\varphi_{k,\mu}(t).$$

Wobec tego j-ty wiersz z W_j można zapisać tak $(*)$:

$$\left[\varphi'_{1,j}(t), \ldots, \varphi'_{n,j}(t)\right] = \left[\sum_{\mu=1}^{n} a_{j\mu}(t)\varphi_{1\mu}(t), \ldots, \sum_{\mu=1}^{n} a_{j\mu}(t)\varphi_{n\mu}(t)\right] =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{n} \left(a_{j\mu}(t)\left[\varphi_{1\mu}(t), \ldots, \varphi_{n\mu}(t)\right]\right).$$

Ze względu na to, że dodanie do jednego wiersza macierzy, innego wiersza pomnożonego przez stałą, lub jak w tym przypadku, przez funkcję ciągłą, nie zmienia wyznacznika, możemy napisać[1]:

$$W_j(t) = a_{jj}W(t)$$

No a skoro $(W(t))' = \sum_{j=1}^{n} W_j(t)$:

$$(W(t))' = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}W(t) = \mathrm{tr}A(t) \cdot W(t).$$

Mamy więc:

$$\frac{W'(t)}{W(t)} = \mathrm{tr}A(t),$$

co poprzez obustronne całkowanie prowadzi do:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{W'(t)}{W(t)}dt = \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(t)dt.$$

A stąd dostajemy od razu:

$$\ln|W(t)| - \ln|W(t_0)| = \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(t)dt,$$

czyli:

$$\left|\frac{W(t)}{W(t_0)}\right| = e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(t)dt}.$$

Wartość bezwzględną opuszczamy, bo wyrażenie ma stały znak. Dostajemy więc tezę twierdzenia:

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A(t)dt}.$$

□

6.2.2 Przestrzeń rozwiązań układu jednorodnego

Twierdzenie 6.2.5. *Istnieje nieskończenie wiele układów fundamentalnych. Każdy z nich jest bazą przestrzeni liniowej wszystkich rozwiązań układu (UJ). Ponadto dla każdego rozwiązania układu jednorodnego y, istnieje $C \in \mathbb{R}^n$ takie, że $y(t) = \phi(t) \cdot C$.*

Plan dowodu:

1. Pokazujemy istnienie nieskończenie wielu układów fundamentalnych.

2. Pokazujemy wzór $y(t) = \phi(t) \cdot C$ – wybieramy dowolne rozwiązanie i dobieramy dla niego odpowiednie C.

3. Na podstawie poprzednich punktów stwierdzamy, iż rzeczywiście układ fundamentalny tworzy bazę.

[1] Z wzorów które podaliśmy w $(*)$ widać, że j-ty wiesz to suma składająca się z innych wierszy pomnożonych przez funkcję, oraz wiersza $[a_{jj}\varphi_{1j}(t), \ldots, a_{jj}\varphi_{nj}(t)]$. Tak jak powiedzieliśmy, inne składniki sumy nie wpływają na wyznacznik, więc wszystko co trzeba zrobić, to wyłączyć $a_{jj}(t)$ i otrzymujemy wrońskian.

Dowód. Wiemy[2], że rozwiązania tworzą podprzestrzeń liniową funkcji ciągłych $[a, b] \to \mathbb{R}^n$. Można więc mówić o bazie tej przestrzeni.

Pokażemy najpierw istnienie nieskończenie wielu różnych układów fundamentalnych. Niech $\phi(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]$, oraz niech $t_0 \in [a, b]$, oraz niech $\varphi_j(t)$ będzie rozwiązaniem (UJ) takim, że $\varphi(t_0) = c_j \in \mathbb{R}^n$. Niech wektory c_j będą takie, że $(*)\quad \det[c_1, c_2, \ldots, c_n] \neq 0$. Wtedy oczywiście $\det \phi(t_0) \neq 0$, a co za tym idzie, funkcje $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ tworzą układ fundamentalny. Układów fundamentalnych jest więc tyle ile sposobów doboru wektorów $c_j \in \mathbb{R}^n$ aby spełniony był warunek $(*)$, czyli nieskończenie wiele.

Pokażemy teraz poprawność wzoru $y(t) = \phi(t) \cdot C$. Niech $\{\varphi_j\}_{j=1,\ldots,n}$ będzie układem fundamentalnym rozwiązań (UJ), a y dowolnym rozwiązaniem tegoż układu. Ze względu na $W(t_0) \neq 0$, można odwrócić macierz $\phi(t_0)$, czyli można napisać: $(**)\ C := \phi^{-1}(t_0)y(t_0)$. Zdefiniujmy teraz funkcję z, która niech będzie dana wzorem $z(t) = \phi(t)C$. Oczywiście z jest rozwiązaniem układu (UJ) oraz na pewno $z(t_0) = y(t_0)$. Z jednoznaczności rozwiązania (UJ) wiemy, że $y \equiv z$. Tak więc, dobór stałej $(**)$ jest dobry dla rozwiązania y.

Z powyższego wiemy, że dowolne rozwiązanie jest pewną kombinacją liniową elementów układu fundamentalnego, oraz dowolna kombinacja liniowa elementów układu fundamentalnego to rozwiązanie. Wobec tego układ fundamentalny jest bazą przestrzeni rozwiązań. □

6.3 Układ niejednorodny

W tym podrozdziale będziemy chcieli podać i udowodnić twierdzenia o istnieniu, jednoznaczności i postaci rozwiązania układu niejednorodnego. Zanim jednak to zrobimy, musimy wprowadzić nowe pojęcie – normę macierzy.

6.3.1 Wiadomości pomocnicze – norma macierzy

Definicja 6.3.1 (norma macierzy)**.** Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Wówczas normą macierzy nazywamy liczbę: $\sup_{||x||=1} ||Ax||$ i oznaczamy $||A||$.

Jak widać więc, norma macierzy definiowana jest przez daną normę wektora[3].

Uwaga 6.3.2 (interpretacja normy macierzy)**.** Wzór podany w definicji normy macierzy, można zapisać równoważnie na jeden z podanych niżej sposobów:

$$||A|| = \sup_{||x||=1} ||Ax|| = \sup_{||x||\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \inf\{\lambda > 0\colon \forall_x ||Ax|| \leqslant \lambda ||x||\}.$$

Norma macierzy mówi o maksymalnym wydłużeniu wektora po przekształceniu przez macierz A w sensie danej normy wektorowej $||.||$

Fakt 6.3.3 (wzory na normy macierzy)**.** *Poniżej zebrano wzory na normę macierzy dla różnych norm wektorowych.*

[2] Wynika to z wcześniej podanego faktu.

[3] No bo oczywiście Ax jest wektorem, czyli $||Ax||$ oznacza normę wektorową.

- *Dla normy wektorowej danej wzorem:* $||x|| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$, *norma macierzy* A *dana jest wzorem:*

$$||A||_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- *Dla normy wektorowej danej wzorem:* $||x|| = \max_j |x_j|$, *norma macierzy* A *dana jest wzorem:*

$$||A||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

6.3.2 Istnienie i jednoznaczność rozwiązania

Twierdzenie 6.3.4. *Jeśli wyrazy macierzy* A *i* b *są funkcjami ciągłymi na* $[a, b]$, *to dla każdego* $t_0 \in [a, b]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* (UN) *spełniające warunek* $x(t_0) = x_0$.

Plan dowodu: Będziemy korzystać z globalnego tw. Picarda. Pokażemy więc, iż są spełnione założenia tegoż twierdzenia, tj. że funkcja $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem drugiej współrzędnej.

Dowód. Prawą stronę (UN) definiujemy funkcją $f(t, x) = A(t)x + b(t)$. Pokażemy, że takie f spełnia założenia tw. Picarda, tzn. że jest ciągła i spełnia warunek Lipschitza względem drugiej współrzędnej.

Wiemy z założeń naszego twierdzenia, że funkcja f jest ciągła względem pierwszej zmiennej. Wystarczy pokazać, że jest spełniony warunek Lipschitza, gdyż jeśli jest, to funkcja f będzie również ciągła.

Niech $t \in [a, b]$ oraz $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wtedy:

$$||f(t, x) - f(t, y)||_\infty = ||A(t)x + b(t) - A(t)y - b(t)||_\infty =$$

$$= ||A(t)x - A(t)y||_\infty \leqslant ||A(t)||_\infty ||x - y||_\infty$$

Korzystać będziemy z wzoru na normę macierzy:

$$(*) \quad ||A(t)||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|.$$

Z ciągłości funkcji a_{ij} wiemy, że:

$$\forall_i \exists_{L_i} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)| \leqslant L_i.$$

No a zgodnie z $(*)$ możemy napisać, że:

$$||A(t)||_\infty \leqslant \max_{i=1,\dots,n} L_i =: L.$$

Tak więc:

$$||f(t, x) - f(t, y)||_\infty \leqslant L||x - y||_\infty.$$

Wiemy więc, że funkcja f spełnia założenia tw. Picarda, wobec czego nasza teza jest prawdziwa. □

6.3.3 Postać rozwiązania

Twierdzenie 6.3.5 (rozwiązanie ogólne (UN))**.** *Jeśli $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ stanowią układ fundamentalny rozwiązań (UJ), ψ jest dowolnym rozwiązaniem (UN), to:*

$$\psi(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t) = \psi(t) + \phi(t)C,$$

jest rozwiązaniem ogólnym układu niejednorodnego.

Dowód. 1. Funkcja dana wzorem $\psi(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)$ jest rozwiązaniem (UN) – aby to pokazać, wystarczy wstawić ją do układu.

2. Trzeba więc pokazać jeszcze, że jeśli mamy dowolne rozwiązanie y to da się je wyrazić wzorem $\psi(t) + \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(t)$, czyli że da się dobrać stałe c_j. No ale, jeśli y jest rozwiązaniem (UN), to na pewno funkcja $y - \psi$ jest rozwiązaniem (UJ), co łatwo można pokazać. Zgodnie z podanym wcześniej twierdzeniem $\exists_{C \in \mathbb{R}^n}$ takie, że:

   $$y - \psi = \phi(t)C.$$

   Czyli jesteśmy w stanie dobrać odpowiednie stałe dla dowolnego rozwiązania. A to oznacza, że wzorem podanym w naszym twierdzeniu da się wyrazić każde rozwiązanie, wobec czego teza jest rzeczywiście prawdziwa.

□

6.4 Układ o stałych współczynnikach

6.4.1 Wprowadzenie

Układ o stałych współczynnikach, jaki będziemy rozważać, dany będzie wzorem $x'(t) = Ax(t)$, gdzie A jest macierzą niezależną od t. W tym podrozdziale będziemy dążyli do pokazania metody wyznaczania macierzy fundamentalnej takiego układu, oznaczanej e^{tA}. Zanim jednak przejdziemy do omawiania samej metody, musimy zdefiniować kilka pojęć i podać kilka faktów, aby wyjaśnić sens symbolu e^{tA}.

Z rozwinięcia w szereg funkcji e^x, możemy napisać, że $e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} A^j$. W zapisie tym pojawia się szereg macierzy. Zaczniemy więc od zdefiniowania czym on jest, oraz co oznacza zbieżność takiego szeregu.

6.4.2 Ciągi i szeregi macierzy

Definicja 6.4.1 (zbieżny ciąg macierzy)**.** Ciąg macierzy $\{A_\mu\}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{\mu\to\infty} a_{ij,\mu}$ istnieje dla wszystkich i, j. Innymi słowy ciąg macierzy jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbieżny po wyrazach.

Fakt 6.4.2. *Zachodzi wzór:*

$$\lim_{\mu\to\infty} A_\mu = A \Longleftrightarrow \lim_{\mu\to\infty} ||A_\mu - A|| = 0.$$

Dowód. pomijamy.

Definicja 6.4.3. Szereg macierzy $\sum_{\mu=0}^{\infty} B_\mu$ nazywamy zbieżnym, jeśli istniej granica:

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{\mu=0}^{N} B_\mu.$$

Definicja 6.4.4 (warunek Cauchy'ego dla ciągów macierzy)**.** Mówimy, ze ciąg macierzy $\{A_\mu\}$ spełnia warunek Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_N\forall_{k,m>N}||A_k - A_m|| < \epsilon.$$

Fakt 6.4.5. *Ciąg macierzy jest zbieżny, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek Cauchy'ego.*

Twierdzenie 6.4.6 (zbieżność szregeu e^B)**.** *Szereg* $e^B = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}B^j$ *jest zbieżny dla dowolnej macierzy kwadratowej* B*.*

Plan dowodu: Korzystamy ze zbieżności szeregu. Czyli musimy pokazać, że odpowiedni ciąg macierzy jest zbieżny. Korzystamy z Faktu 6.4.5 i pokazujemy, że ciąg ten spełnia warunek Cauchy'ego.

Dowód. Aby szereg e^B był zbieżny potrzeba i wystarcza, aby ciąg $\sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}B^j$ spełniał warunek Cauchy'ego.

Niech $k < m$. Wtedy mamy:

$$||\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}B^j - \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}B^j|| = ||\sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j!}B^j||.$$

Z nierówności trójkąta, otrzymane wyrażenie można oszacować, przez:

$$\leqslant \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j!}||B^j|| \leqslant \sum_{j=k+1}^{m} \frac{1}{j!}||B||^j.$$

Otrzymane wyrażenie, możemy oszacować przez sumę nieskończoną:

$$\leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!}||B||^j.$$

Jest to reszta szeregu liczbowego $e^{||B||}$ i przy $k \to 0$ reszta ta również dąży do zera. Możemy więc odpowiednio ustalić k i m aby wartość szacowanego wyrażenia była dowolnie mała. To daje nam warunek Cauchy'ego, czyli szereg e^B jest zbieżny. $\square$

Fakt 6.4.7. *Zachodzi wzór:*

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Dowód.

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}A^j =$$

Możemy zamienić kolejność sumy i pochodnej, ze względu na jednostajną zbieżność szeregu[4]:

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{t^j}{j!}A^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}A^j = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}A^{i+1}.$$

Co z definicji równe jest:

$$= Ae^{tA} = e^{tA}A$$

□

Wniosek 6.4.8. Z powyższych twierdzeń i faktów wiemy już, że:

- każda z kolumn macierzy e^{tA} jest rozwiązaniem układu jednorodnego,
- dla $t = 0$ macierz e^{tA} jest macierzą jednostkową,
- wyznacznik macierzy e^{tA} jest różny od zera dla każdego t, tak więc kolumny macierzy tworzą układ fundamentalny.

Lemat 6.4.9. *Jeśli $AB = BA$ to:*

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

Plan dowodu: Będziemy korzystać z wzoru na mnożenie szeregów:

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{i}(A_l \cdot B_{i-l}),$$

oraz z wzoru na k-tą potęgę sumy macierzy:

$$(A+B)^k = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}A^pB^{k-p},$$

który jest poprawny jeśli $AB = BA$.

Dowód. Rozpiszmy lewą stronę równości z tezy:

$$e^A e^B = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}A^j\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{\mu!}B^{\mu}.$$

Korzystając z wzoru na mnożenie szeregów mamy:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!}A^p\frac{1}{(k-p)!}B^{k-p} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{k}\frac{k!}{p!(k-p)!}A^pB^{k-p} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\underbrace{\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}A^pB^k}_{=(A+B)^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k = e^{A+B}.$$

□

Wniosek 6.4.10. Wiem więc, że:

- $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$,
- $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$.

[4] Co prawda nie pokazaliśmy tej jednostajnej zbieżności, ale tak jest.

6.4.3 Metoda Putzera

Wiemy już bardzo wiele o macierzy fundamentalnej e^{tA}. Udowodnimy teraz twierdzenie, w którego treści opisana jest metoda wyznaczania macierzy e^{tA} dla danego układu równań.

Twierdzenie 6.4.11 (metoda Putzera)**.** *Rozważmy układ równań, zapisany w postaci* $x' = Ax$*. Niech, dla* $i = 1, \ldots, n$*,* λ_i *będą wartościami własnymi macierzy* A*. Niech ponadto:* $p_0(t) = e^{\lambda_1 t}$*,* $p_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_{k+1}(t-s)} p_{k-1}(s) ds$ *dla* $k = 1, 2, \ldots, n-1$*,* $Q_0 = I$*,* $Q_{j+1} = Q_j(A - \lambda_{j+1} I)$ *dla* $j = 0, 1, \ldots, n-2$*, to:*

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) Q_j. \qquad (*)$$

Uwaga 6.4.12. Zakładamy w tym twierdzeniu, że macierz A ma rozmiar $n \times n$, oraz, że jeśli któraś z wartości własnych macierzy jest wielokrotna, to wypisujemy ją tyle razy ile wynosi krotność, czyli zawsze mamy układ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wartości własne możemy oczywiście wyliczyć z równania charakterystycznego macierzy: $\det(A - \lambda I) = 0$.

Dowód. Chcemy pokazać, iż istotnie prawdziwy jest wzór $(*)$. Warunki:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) \\ X(0) = I \end{cases}$$

wyznaczają macierz e^{tA} w sposób jednoznaczny (oczywiście, zakładamy, że jest to równanie macierzowe, czyli $X(t)$ oznacza macierz $n \times n$, natomiast $X'(t)$ to pochodna macierzy X, czyli po prostu pochodna każdego z wyrazów macierzy X). Pokażemy, że jeśli przyjmiemy, że prawdziwy jest wzór $(*)$, to powyższe warunki są spełnione. Pokażemy więc, że:

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) Q_j\right)' = A \left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) Q_j\right) \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_j(0) Q_j = I \end{cases}$$

Drugi z warunków możemy sprowadzić, do: $p_0 = 1, Q_0 = I, p_j(0) = 0$ dla $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Zajmijmy się więc pierwszym warunkiem. Pierwszy warunek sprowadza się, do pokazania, że zachodzi:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_j'(t) Q_j = \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) A Q_j.$$

Z definicji Q_j możemy przekształcić prawą stronę[5]:

$$\sum_{j=0}^{n-1} p_j'(t) Q_j = \sum_{j=0}^{n-1} \left(p_j(t) \left(Q_{j+1} + \lambda_{j+1} Q_j\right)\right).$$

[5] Wynika to z faktu: $AQ_j = Q_{j+1} + \lambda_{j+1} Q_j$. Wynika on wprost z definicji Q_j. Mamy bowiem: $Q_{j+1} = Q_j(A - \lambda_{j+1} I)$. Mnożąc nawias dostajemy: $Q_{j+1} = Q_j A - \lambda_{j+1} Q_j$. No a stąd: $Q_{j+1} + \lambda_{j+1} Q_j = Q_j A$.

Porównajmy teraz współczynniki po obu stronach:

	lewa strona	prawa strona
Q_0	$p_0'(t)$	$\lambda_1 p_0(t)$
Q_1	$p_1'(t)$	$p_0(t) + \lambda_2 p_1(t)$
Q_2	$p_2'(t)$	$p_1(t) + \lambda_3 p_2(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Q_{n-1}	$p_{n-1}'(t)$	$p_{n-2}(t) + \lambda_n p_{n-1}(t)$
Q_n	0	$p_{n-1}(t)$

Zauważmy, że macierz Q_n dana jest wzorem:

$$Q_n = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_n I).$$

Ponieważ λ_i to wartości własne, to macierz Q_n musi być macierzą zerową[6]. Tak więc, ostatnia pozycja w tabli z współczynnikami się zgadza. Pozostałe współczynniki również są jednakowe po obu stronach. Tak więc rzeczywiście, macierz dana wzorem $(*)$ spełnia sformułowane warunki na e^{tA}, a z jednoznaczności rozwiązań takiego zagadnienia wiemy, że w takim razie wzór $(*)$ musi wyrażać e^{tA}. $\square$

[6]Jest to fakt z Algebry liniowej.

Rozdział 7

Dwupunktowe zagadnienie brzegowe

7.1 Wprowadzenie

W rozdziale tym zajmować się będziemy równaniami liniowymi drugiego rzędu, o współczynnikach funkcyjnych. Równania tego typu były szczegółowo omówione w jednym z poprzednich rozdziałów. Teraz jednak, rozpatrywać będziemy zagadnienia, w których dodatkowy warunek ma inną postać niż poprzednio. Warunek ten nosić będzie nazwę warunku brzegowego, gdyż zawiera wartości rozwiązania w różnych punktach przedziału $[a, b]$. Rozpatrywane zagadnienie będziemy nazywać „zagadnieniem brzegowym”, oznaczać je będziemy (ZB) i będzie ono postaci:

$$\begin{cases} z''(t) + p(t)z'(t) + q(t)z(t) = f(t) \\ a_1 z(a) + a_2 z'(a) = c_1, \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \\ b_1 z(b) + b_2 z'(b) = c_2, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \end{cases}$$

7.1.1 Oznaczenia

Poza oznaczeniem ogólnym (ZB) będziemy używać następujących oznaczeń:

$$\begin{aligned} &(Lz)(t) := z''(t) + p(t)z'(t) + q(t)z(t) \\ &u_1(z) := a_1 z(a) + a_2 z'(a) \\ &u_2(z) := b_1 z(b) + b_2 z'(b) \end{aligned}$$

Zgodnie z tym co mówiliśmy już wcześniej, L jest operatorem, czyli taką funkcją, której dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór funkcji. Funkcje u_1, u_2, są natomiast funkcjami, których dziedziną jest zbiór funkcji, a przeciwdziedziną, zbiór liczb (w naszym przypadku liczb rzeczywistych bądź zespolonych). Takie funkcje nazywamy funkcjonałami.

Zagadnienie brzegowe przy tak dobranych oznaczeniach ma postać[1]:

$$(ZB) \begin{cases} Lz = f \\ u_1(z) = c_1 \\ u_2(z) = c_2 \end{cases}$$

Zauważmy ponadto, że zarówno operator L, jak i funkcjonały u_1, u_2 są liniowe, czyli są addytywne[2] i jednorodne[3].

[1] Oczywiście obie formy są równoważne – znaczą dokładnie to samo.

[2] Funkcja f jest addytywna, jeśli spełnione jest $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

[3] Funkcja f jest jednorodna, jeśli spełnione jest $f(kx) = kf(x)$, gdzie k jest stałą.

7.2 Rozwiązania zagadnienia brzegowego

Przy rozpatrywaniu zagadnień brzegowych, nie możemy oczywiście zastosować żadnego z twierdzeń sformułowanych dla zagadnienia początkowego[4]. Trzeba więc podać nowe warunki, na to aby istniało jednoznaczne rozwiązanie takiegoż zagadnienia.

Twierdzenie 7.2.1 (istnienie i jednoznaczność rozwiązania zagadnienia brzegowego). *Zagadnienie (ZB) posiada rozwiązanie dla każdych $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $f \in C([a,b], \mathbb{R})$, wtedy i tylko wtedy, gdy zagadnienie $Lz \equiv 0, u_1(z) = u_2(z) = 0$ posiada tylko rozwiązanie zerowe*[5].

Plan dowodu: Korzystając z faktów na temat postaci ogólnej rozwiązania równanie liniowego wyższego rzędu, budujemy rozwiązanie (ZB) i pokazujemy, że warunki na to aby rozwiązanie to wyznaczone było jednoznacznie, są dokładnie tymi warunkami które podaje twierdzenie.

Dowód. Niech funkcja φ_1, φ_2 stanowią układ fundamentalny rozwiązań równania $Lz \equiv 0$, oraz niech funkcja ψ będzie dowolnym rozwiązaniem równania $Lz = f$. Poszukiwać będziemy funkcji z, która ma spełniać (ZB). Z twierdzenia o postaci ogólnej rozwiązania równania liniowego wyższego rzędu, wiemy, że z daje się na pewno zapisać w postaci:

$$z = \psi + d_1\varphi_1 + d_2\varphi_2,$$

gdzie d_1, d_2 to pewne stałe, które będziemy chcieli wyznaczyć. Musimy dobrać je tak aby spełnione były warunki brzegowe, czyli aby zachodziło:

$$\begin{cases} u_1(z) = u_1(\psi) + d_1u_1(\varphi_1) + d_2u_1(\varphi_2) = c_1 \\ u_2(z) = u_2(\psi) + d_1u_2(\varphi_1) + d_2u_2(\varphi_2) = c_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Jeśli udowodnimy, że zawsze daje się dobrać jakieś stałe d_1, d_2, będziemy mieć pewność, że zawsze istnieje jakieś rozwiązanie (ZB). Jeśli okaże się, że wybór ten jest jednoznaczny, będziemy mieć pewność, że istnieje jednoznaczne (jedyne) rozwiązanie (ZB).

Zauważmy, że układ $(*)$, można zapisać w postaci macierzowej:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1(\varphi_1) & u_1(\varphi_2) \\ u_2(\varphi_1) & u_2(\varphi_2) \end{bmatrix}}_{=:U} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - u_1(\psi) \\ c_2 - u_2(\psi) \end{bmatrix}$$

Chcemy aby układ ten posiadał dokładnie jedno rozwiązanie. Z tw. Cramera wiemy, iż jest to możliwe tylko wtedy, gdy $\det U \neq 0$. No ale, warunek ten jest równoważny warunkowi, że układ: $U \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ma tylko jedno rozwiązanie. A jeśli taki układ ma tylko jedno rozwiązanie to na pewno jest to rozwiązanie zerowe. Czyli warunek istnienia i jednoznaczności rozwiązania (ZB) jest rzeczywiście taki, jak w treści twierdzenia. □

[4]Oczywiście możemy korzystać z twierdzeń ogólnych, które nie odnosiły się bezpośrednio do warunków początkowych, a jedynie do równania liniowego wyższego rzędu.

[5]Czyli jedynym rozwiązaniem spełniającym to zagadnienie musi być funkcja $z \equiv 0$.

7.3 Postać rozwiązania (ZB)

W dalszych rozważaniach, aby uprościć zapisy, wprowadzimy nieco inne oznaczenia dla zagadnienia brzegowego. Równanie $Lz = f$ możemy zapisać w postaci:

$$(\bar{p}(t)z'(t))' + \bar{q}(t)z(t) = \bar{f}(t),$$

gdzie funkcje $\bar{p}, \bar{q}, \bar{f}$ dane są wzorami:

$$\bar{p}(t) = e^{\int_{t_0}^{t} p(s)ds},$$

$$\bar{q}(t) = \bar{p}(t)q(t),$$

$$\bar{f}(t) = \bar{p}(t)f(t).$$

Zdefiniujmy więc nowy operator, określający lewą stronę równania:

$$(\Lambda z)(t) := (p(t)z'(t))' + q(t)z(t),$$

gdzie przyjmujemy $p(t) := \bar{p}(t), q(t) := \bar{q}(t)$.

7.3.1 Funkcja Greena

Zdefiniujemy teraz specjalną funkcję, z której będziemy korzystać, aby podać postać ogólną rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Definicja 7.3.1 (funkcja Greena dla (ZB))**.** Funkcję $G\colon [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją Green'a zagadnienia $\Lambda z \equiv 0$, $u_1(z) = u_2(z) = 0$, jeżeli są warunki:

1. Funkcja $G(t, s)$ jest ciągła, natomiast $\frac{\partial G}{\partial t}$ oraz $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ są ciągłe na prostokącie bez przekątnej: $[a, b] \times [a, b] \setminus \{(t, t) \colon t \in [a, b]\}$.

2. Zachodzi: $\frac{\partial G}{\partial t}(s + 0, s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s - 0, s) = \frac{1}{p(s)}$, gdzie zapisy $s + 0$ oraz $s - 0$ rozumie się, jako granicę odpowiednio prawo- i lewo-stronną.

3. Spełnione jest: $(\forall_s \Lambda G(\cdot, s))(t) = 0$ dla każdego $t \neq s$, oraz zachodzi $u_1(G(\cdot, s)) = u_2(G(\cdot, s)) = 0$. Czyli funkcja Greena musi spełniać zagadnienie brzegowe jednorodne z warunkami zerowymi, na pierwszej współrzędnej (przy dowolnie ustalonej drugiej), przy czym równania różniczkowego nie spełnia w jednym punkcie ($t = s$).

7.3.2 Zagadnienie z warunkami zerowymi

Twierdzenie 7.3.2 (postać rozwiązania (ZB) z warunkami zerowymi)**.** *Jeśli funkcje p', q, f są ciągłe na $[a, b]$ to funkcja $y(t) = \int_a^b G(t, s)f(s)ds$ jest rozwiązaniem zagadnienia $\Lambda y = f, u_1(y) = u_2(y) = 0$.*

Dowód. Pokażemy wprost, że funkcja dana wzorem z twierdzenia, rzeczywiście spełnia odpowiednie zagadnienie. Pomocny okaże się wzór:

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t, s)ds = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(t, s)ds + \beta'(t)g(t, \beta(t)) - \alpha'(t)g(t, \alpha(t)).$$

Chcemy policzyć y' i y'' dla funkcji y danej w twierdzeniu. Zaczniemy od rozpisania całki pojawiającej się we wzorze na y:

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)f(s)ds = \int_a^t G(t,s)f(s)ds + \int_t^b G(t,s)f(s)ds.$$

Zgodnie z wzorem (7.3.2) mamy więc:

$$y'(t) = G(t,t)f(t) + \int_a^t \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds + \int_t^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds - G(t,t)f(t) =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds.$$

Analogicznie, wyznaczamy y'':

$$y''(t) = \int_a^t \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds + \frac{\partial G}{\partial t}(t,t-0)f(t) +$$

$$+ \int_t^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds - \frac{\partial G}{\partial t}(t,t+0)f(t).$$

Korzystając, z własności funkcji Greena, oraz z faktu, że: $\frac{\partial G}{\partial t}(t,t-0) = \frac{\partial G}{\partial t}(t+0,t)$, $\frac{\partial G}{\partial t}(t,t+0) = \frac{\partial G}{\partial t}(t-0,t)$, mamy:

$$y''(t) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds + \frac{f(t)}{p(t)}.$$

Możemy teraz podstawić y do rozpatrywanego równania:

$$(p(t)y'(t))' + q(t)y(t) = p'(t)y'(t) + p(t)y''(t) + q(t)y(t) =$$

$$= p'(t)\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t,s)f(s)ds + p(t)\left(\int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s)f(s)ds + \frac{f(t)}{p(t)}\right) +$$

$$+ q(t)\int_a^b G(t,s)f(s)ds =$$

$$= f(t) + \int_a^b f(s)\left(p'(t)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) + p(t)\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) + q(t)G(t,s)\right)ds =$$

Co możemy zapisać prościej:

$$= f(t) + \int_a^b f(s)\left(\Lambda G(\cdot,s)\right)ds = f(t),$$

z definicji funkcji Greena $\Lambda G(\cdot,s) \equiv 0$, czyli całka w powyższej równości równa jest zero. Tak więc, funkcja y spełnia równanie $Ly = f$. Spełnione są również warunki brzegowe, co bardzo łatwo pokazać (z funkcjonałami u_1, u_2 wchodzimy pod całkę, i z definicji funkcji Greena, mamy wprost, że wszystko musi być spełnione zgodnie z treścią naszego twierdzenia). $\square$

7.3.3 Rozwiązanie ogólne

Twierdzenie 7.3.3 (postać rozwiązania zagadnienia brzegowego w ogólnym przypadku). *Jeśli funkcja $\omega \in C^2([a,b],\mathbb{R})$, jest funkcją taką, że $u_1(\omega) = \alpha, u_2(\omega) = \beta$, to funkcja: $z(t) = \int_a^b G(t,s)(f(s) - (\Lambda\omega)(s))ds + \omega(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia $\Lambda x = f, u_1(x) = \alpha, u_2(x) = \beta$.*

Dowód. Funkcja z rzeczywiście spełnia zadane zagadnienie, ponieważ (z liniowości u_j):

$$u_j(z) = 0 + u_j(\omega) = \begin{cases} \alpha & j = 1 \\ \beta & j = 2 \end{cases},$$

ponadto:

$$\Lambda z = (f(t) - (\Lambda\omega)(t)) + (\Lambda\omega)(t) = f(t).$$

Pierwszy składnik sumy, otrzymujemy z zastosowania poprzedniego twierdzenia, dla zagadnienia $(\Lambda x)(t) = g(t)$, gdzie $g(t) = f(t) + (\Lambda\omega)(t)$.

□

7.3.4 Wyznaczanie funkcji Green'a

Dotychczas podaliśmy jedynie formalną definicji warunków, które musi spełniać funkcja, aby być funkcją Green'a danego zagadnienia. Teraz zaprezentujemy metodę znajdowania konkretnej funkcji, która będzie spełniać te warunki.

Załóżmy, że dane jest równanie $\Lambda x = f$, z warunkami $u_1(x) = \alpha, u_2(x) = \beta$. Niech φ_1, φ_2 będą rozwiązaniami równania $\Lambda x \equiv 0$ takimi, że $u_1(\varphi_1) = 0$ oraz $u_2(\varphi_2) = 0$, $(*)$ $\varphi_i \not\equiv 0$. Funkcje te łatwo można znaleźć, rozwiązując równanie $\Lambda x \equiv 0$ z warunkiem początkowym (nie brzegowym). Dla φ_1 warunek musi być dobrany tak aby zachodziło $a_1\varphi_1(a) + a_2\varphi_1'(a) = 0$, czyli na przykład: $(WP) = \begin{cases} \varphi_1(a) = \lambda a_2 \\ \varphi_1'(a) = -\lambda a_1 \end{cases}$. Dla φ_2 dobieramy warunek analogiczny.

Tak dobrane φ_1, φ_2 są liniowo niezależne. Załóżmy bowiem, że $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$ oraz $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 \equiv 0$. Niech więc np. $\lambda_1 \neq 0$. Wtedy $\varphi_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\varphi_2$. A zatem $u_2(\varphi_1) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}u_2(\varphi_2) = 0$. Wynikałoby stąd, że $\Lambda\varphi_1 \equiv 0$ oraz $u_1(\varphi_1) = u_2(\varphi_1) = 0$. No ale, stąd wynika natychmiast[6], że $\varphi_1 \equiv 0$, co jest sprzeczne z naszym wcześniejszym założeniem $(*)$. Tak więc, założenie, że funkcje φ_1, φ_2 są liniowo zależne, prowadzi do sprzeczności.

Szukamy funkcji postaci:

$$G(t,s) = \begin{cases} \chi_1(s)\varphi_1(t) & \text{dla } t \leqslant s \\ \chi_2(s)\varphi_2(t) & \text{dla } t \geqslant s \end{cases}$$

Musimy zagwarantować, że funkcja G spełnia definicję funkcji Green'a.

1. Nasza funkcja G spełnia warunki brzegowe na pierwszej zmiennej:

$$\begin{aligned} u_1(G(\cdot,s)) = u_1(\chi_1(s)\varphi_1) = \chi_1(s)u_1(\varphi_1) = 0 \\ u_2(G(\cdot,s)) = u_2(\chi_1(s)\varphi_1) = \chi_2(s)u_2(\varphi_2) = 0 \end{aligned}$$

   Funkcja ta, spełnia również $\Lambda(G(\cdot,s)) \equiv 0$, ze względu na dobór φ_1, φ_2.

[6] Musi tak być rzeczywiście, ze względu na warunek istnienia rozwiązania zagadnienia brzegowego, którego szukamy.

2. Funkcja G musi być ciągła, czyli musi zachodzić:

$$\chi_1(s)\varphi_1(s) = \chi_2(s)\varphi_2(s). \qquad (1)$$

3. Musi być spełniony również warunek:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(s+0,s) - \frac{\partial G}{\partial t}(s-0,s) = \chi_2(s)\varphi_2'(s) - \chi_1(s)\varphi_1'(s) = \frac{1}{p(s)}. \qquad (2)$$

Musimy więc wyznaczyć χ_1, χ_2, tak aby spełnione były warunki $(1), (2)$. Mamy więc do rozwiązania układ równań[7], którego wyznacznik główny ma postać: $-\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix}$, czyli $-W(s)$. Wiemy, że wyznacznik ten nie zeruje się (ze względu na wybór φ_i). Stosując więc wzory Cramera, mamy:

$$\chi_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(s) \\ \frac{-1}{p(s)} & \varphi_2'(s) \end{vmatrix}}{-W(s)} = \frac{\varphi_2(s)}{p(s)W(s)},$$

$$\chi_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & 0 \\ \varphi_1'(s) & \frac{-1}{p(s)} \end{vmatrix}}{-W(s)} = \frac{\varphi_1(s)}{p(s)W(s)}.$$

Nasza funkcja G ma więc postać:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{p(s)W(s)} & \text{dla} t \leqslant s \\ \frac{\varphi_2(t)\varphi_1(s)}{p(s)W(s)} & \text{dla} t \geqslant s \end{cases}$$

Okazuje się jednak, że wyrażenie $p(s)W(s)$ znajdujące się w mianowniku, jest stałe. Co można łatwo udowodnić korzystając z tego, że φ_1, φ_2 są rozwiązaniami równania $\Lambda x = 0$. Mamy bowiem[8]:

$$\begin{cases} (p(s)\varphi_1'(s))' + q(s)\varphi_1(s) = 0 \\ (p(s)\varphi_2'(s))' + q(s)\varphi_2(s) = 0 \end{cases}$$

Pierwsze równanie mnożymy obustronnie przez φ_2, a drugie przez φ_1, a następnie odejmujemy stronami. Otrzymujemy:

$$0 = \varphi_2 \cdot \underbrace{((p(s)\varphi_1'(s))' + q(s)\varphi_1(s))}_{\text{równanie pierwsze}} - \varphi_1 \cdot \underbrace{((p(s)\varphi_2'(s))' + q(s)\varphi_2(s))}_{\text{równanie drugie}} =$$

$$= p(s)(\varphi_2(s)\varphi_1'' - \varphi_1(s)\varphi_2''(s)) + p'(s)(\varphi_2(s)\varphi_1''(s) - \varphi_1(s)\varphi_2'(s)) =$$

$$= -p(s)\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1''(s) & \varphi_2''(s) \end{vmatrix} - p'(s)\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_2(s) \\ \varphi_1'(s) & \varphi_2'(s) \end{vmatrix} =$$

Zgodnie z wzorem na pochodną wyznacznika, mamy:

$$= -p(s)W'(s) - p'(s)W(s) = -(p(s)W(s))'.$$

[7]Aby lepiej rozumieć co się tutaj dzieje, proponujemy zapisać równania (1) i (2) w układzie równań.
[8]Zapisujemy tu fakt, że φ_1 oraz φ_2 spełniają $\Lambda f \equiv 0$.

Doszliśmy więc, do tego, że $(p(s)W(s))' = 0$, co świadczy o tym, że $p(s)W(s) = const$.

Funkcję G możemy więc podać wzorem:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(s)}{c} & t \leqslant s \\ \frac{\varphi_2(t)\varphi_1(s)}{c} & t \geqslant s \end{cases}$$

gdzie $c = p(s)W(s)$. Aby policzyć wartość stałej c, liczymy wartość wyrażenia $p(s)W(s)$ dla dowolnego s. W ten sposób wyznaczyliśmy funkcję Greena dla zagadnienia (ZB).

Wniosek 7.3.4. Jak widać $G(t,s) = G(s,t)$, tak więc funkcja Green'a jest rozwiązaniem równania nie tylko na pierwszej, ale i na drugiej współrzędnej.

Rozdział 8

Przybliżanie rozwiązania – metoda Eulera

8.1 Wprowadzenie

W tym rozdziale pokażemy metodę, która służy do przybliżania nieznanego rozwiązania równania różniczkowego pierwszego rzędu. Metoda Eulera którą tu opiszemy, jest jedną z najprostszych i najstarszych metod tego typu. Ze względu na ograniczony zakres tego podręcznika, inne metody nie zostaną w ogóle omówione. Należy mieć jednak świadomość iż takowe istnieją. Należy również zwrócić uwagę na wielką wagę metod, które pozwalają przybliżyć nieznane rozwiązania. Niewiele równań bowiem daje się prosto i dokładnie rozwiązać. Często mamy w praktyce do czynienia z równaniami, których nie da się zakwalifikować do żadnego z omówionych typów. Możemy wówczas jedynie sprawdzić, korzystając z odpowiedniego twierdzenia, iż istnieje jednoznaczne rozwiązanie. Często jedynym wyjściem (z reguły wystarczającym) jest znalezienie przybliżonego rozwiązania.

8.2 Idea metody Eulera

Załóżmy, że dane jest zagadnienie:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

określone na przedziale $[a, b]$. Metoda Eulera pozwala otrzymać przybliżenie na przedziale $[\tau, b]$ oraz $[a, \tau]$. Jeśli chcemy otrzymać rozwiązanie na całym przedziale $[a, b]$ musimy zastosować metodę dwukrotnie. Poniżej pokażemy sposób przybliżania rozwiązania na przedziale $[\tau, b]$. Przybliżenie na drugim z przedziałów otrzymujemy analogicznie, i z tych dwóch funkcji budujemy przybliżone rozwiązanie na $[a, b]$.

Metoda Eulera

1. Dzielimy przedział $[\tau, b]$ na n mniejszych przedziałów równej długości. Czyli tworzymy ciąg punktów t_i takich, że $t_0 = \tau$, $t_n = b$, oraz dla każdego $i = 1, \ldots, n-1$ mamy: $t_{i+1} - t_i = h$, gdzie h jest stałą liczbą, zależną od n, taką, że $h = \frac{b-\tau}{n}$. Oczywiście zachodzi $t_i = t_0 + i \cdot h$.

2. Korzystamy z definicji pochodnej, która mówi, iż pochodna funkcji w punkcie, jest granicą ilorazu różnicowego[1]. Będziemy przybliżać tą granicę, poprzez wartość ilorazu różnicowego w punktach t_i, przy ustalonym h tak jak wyżej. Pomysł ten można zapisać tak:

$$\frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \approx x'(t_j) = f(t_j, x(t_j)).$$

Podstawiając do powyższego wzoru $t_j = t_0 + ht_j$ oraz traktując $\approx$ jako $=$ otrzymujemy:

$$x(t_{j+1}) = x(t_j) + hf(t_j, x(t_j)).$$

3. Wprowadzając oznaczenia $y_j := x(t_j), y_0 = x_0$, otrzymujemy wzór metody Eulera:

$$\begin{cases} y_{j+1} = y_j + hf(t_j, y_j) \\ y_0 = x_0 \end{cases}$$

Wzór ten opisuje rekurencyjnie ciąg liczb y_i, który ma być ciągiem przybliżeń wartości rzeczywistego rozwiązania w punktach t_i. Podamy warunek, jaki musi spełniać zagadnienie, aby przy zwiększeniu liczby tych punktów, czyli zmniejszaniu długości przedziału h, przybliżenie było coraz lepsze.

4. Z otrzymanego ciągu punktów budujemy funkcję y, która będzie przybliżeniem całego rozwiązania. Można opisać ją wzorem:

$$\begin{cases} y(t_j) = y_j \\ y(t) = y_j + (t - t_j)\frac{y_{j+1} - y_j}{h} = y_j + (t - t_j)f(t_j, y_j) \quad \text{dla } t \in [t_j, t_{j+1}] \end{cases}$$

Wykresem takiej funkcji jest łamana, zwana łamaną Eulera.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że metoda Eulera daje nam „od razu” przybliżenie rozwiązania na całym przedziale $[a, b]$, a nie na jego części, tak jak to było podane na początku tego rozdziału. Wiemy że da się otrzymać takie przybliżenie na całym przedziale, więc uproszczenie to nie wpływa na poprawność formułowanych twierdzeń i faktów.

8.3 Zbieżność metody Eulera

Definicja 8.3.1. Mówimy, że metoda Eulera jest zbieżna, jeśli:

$$\lim_{N \to \infty} \max_{j=0,\dots,N} |y_j - x(t_j)| = 0.$$

Gdzie y_j jest liczbą zdefiniowaną zgodnie z metodą Eulera, natomiast $x(t_j)$ jest wartością rzeczywistego rozwiązania w punkcie t_j.

Sens tej definicji jest taki: metoda Eulera jest zbieżna, jeśli przy zwiększeniu liczby punktów t_j różnica między dokładnym rozwiązaniem, a rozwiązaniem przybliżonym maleje. Czyli im podział będziesz gęstszy, tym przybliżenie lepsze.

Twierdzenie 8.3.2 (o zbieżności metody Eulera)**.** *Załóżmy, że funkcja $f \in C([a, b] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, oraz istnieje takie $L > 0$, że $\forall_{t \in [a,b]} \forall_{x,y \in \mathbb{R}} |f(t, x) - f(t, y)| \leqslant L|x - y|$. Wówczas metoda Eulera dla zagadnienia (PC) jest zbieżna.*

[1]Czyli: $f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$.

Plan dowodu:

1. Szacujemy błąd metody – czyli odległość rozwiązania dokładnego od przybliżonego.

2. Szacowanie powyższe prowadzi do nierówności rekurencyjnej.

3. Korzystamy z modułu ciągłości[2], aby uprościć szacowanie.

4. Rozwiązujemy nierówność rekurencyjną, tzn. chcemy otrzymać szacowanie błędu metody w węźle t_j, które nie będzie zależne od dobru j a jedynie od h. Korzystamy z warunku Lipschitza, który spełnia funkcja f zgodnie z założeniami naszego twierdzenia.

5. Otrzymujemy oszacowanie, które pozwala w prosty sposób pokazać tezę, tzn. pokazujemy, że jeśli długość przedziału h dąży do zera, to błąd metody w j-tym węźle również.

Dowód. Wprowadźmy na początek oznaczenie. Niech $\Delta_j := |y_j - x(t_j)|$ oznacza błąd metody Eulera w j-tym węźle. Wówczas mamy:

$$\Delta_{j+1} = |y_{j+1} - x(t_{j+1})| \overset{(def)}{=} \left| y_j + hf(t_j, y_j) - x(t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, x(s))ds \right| =$$

Skorzystaliśmy właśnie z definicji Δ_j, y_j oraz zapisaliśmy $x(t_{j+1})$ w postaci całki (x jest rozwiązaniem zagadnienia, a nie przybliżeniem). Teraz do naszego wyrażanie pod wartością bezwzględną dodamy i odejmiemy $hf(t_j, x(t_j))$, aby potem zastosować pewne szacowanie. Mamy więc:

$$= \left| y_j - x(t_j) + hf(t_j, y_j) - hf(t_j, x(t_j)) + hf(t_j, x(t_j)) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s, x(s))ds \right|$$

Zauważmy teraz, że $h = t_{j+1} - t_j$, a wyrażenie $f(t_j, x(t_j))$ oczywiście jest stałą (przy ustalonym j), tak więc $hf(t_j, x(t_j)) = (t_{j+1} - t_j)f(t_j, x(t_j)) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, x(t_j))ds$. Korzystając z tego, wyrażenie $hf(t_j, x(t_j))$ przeniesiemy pod całkę. Skorzystamy również z nierówności trójkąta:

$$\leqslant |y_j - x(t_j)| + h|f(t_j, y_j) - f(t_j, x(t_j))| + \left| \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t_j, x(t_j)) - f(s, x(s))ds \right| \leqslant$$

Skorzystamy teraz z definicji Δ_j, oraz z warunku Lipschitza aby uprościć zapis[3]:

$$\leqslant \Delta_j + hL|y_j - x(t_j)| + \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t_j, x(t_j)) - f(s, x(s))| \, ds =$$

$$= \Delta_j + hL\Delta_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t_j, x(t_j)) - f(s, x(s))| \, ds =$$

[2]Pojęcie to zostanie wyjaśnione w ramach dowodu.

[3]Każdy z trzech składników naszej sumy zapisujemy w innej postaci: $|y_j - x(t_j)| = \Delta_j$, $h|f(t_j, y_j) - f(t_j, x(t_j))| \leqslant hL|y_j - x(t_j)|$, a w całce wchodzimy z wartością bezwzględną pod całkę (po takiej operacji wartość albo wzrośnie albo nie zmieni się).

$$= (hL+1)\Delta_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t_j, x(t_j)) - f(s, x(s))|\, ds.$$

Otrzymaliśmy więc następujące szacowanie $(*)$:

$$\Delta_{j+1} \leqslant (hL+1)\Delta_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} |f(t_j, x(t_j)) - f(s, x(s))|\, ds.$$

Rozważmy teraz funkcję:

$$g(s) = f(s, x(s)), \quad g\colon [a,b] \to \mathbb{R}.$$

Jest to funkcja ciągła, a skoro jest określona na przedziale domkniętym, to jest jednostajnie ciągła, czyli:

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{t,t' \in [a,b]} |t-t'| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(t')| < \epsilon.$$

Z powyższej definicji wynika, iż wybór δ uzależniony jest od wyboru ϵ. Można wobec tego mówić o funkcji (w pewnym sensie). Można też (czego nie uzasadnimy) mówić o sytuacji odwrotnej, tzn. o doborze ϵ dla dowolnej δ, czyli:

$$\forall_{t,t' \in [a,b]} |t-t'| < \delta \Rightarrow |g(t) - g(t')| < \omega(\delta),$$

gdzie $\omega\colon [0, b-a] \to \mathbb{R}_+$ oraz $\lim_{\delta \to 0^+} \omega(\delta) = 0$. Taka funkcja ω nosi nazwę moduł ciągłości funkcji g. Można ją skonstruować, jednak nie będziemy tego robić. Zakładamy po prostu, że ona istnieje.

Skorzystamy z modułu ciągłości w naszej nierówności. Nierówność $(*)$ można bowiem zapisać prościej:

$$\Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j(1+hL) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} \omega(h) ds.$$

Co można zapisać jeszcze prościej:

$$\Delta_{j+1} \leqslant \Delta_j(1+hL) + h\omega(h). \qquad (**)$$

Jest to ostateczna forma tej nierówności. Jak widać, jest to nierówność rekurencyjna, bo Δ_{j+1} zależy do Δ_j. Postaramy się teraz „rozwikłać” tą nierówność, tzn. podać oszacowanie, które nie będzie rekurencyjne. Dla ustalenia uwagi obniżamy na początek indeksy o 1. Mamy:

$$\Delta_j \leqslant \Delta_{j-1}(1+hL) + h\omega(h) \leqslant$$

Dla wyrażenia Δ_{j-1} rekurencyjnie możemy zastosować oszacowanie $(**)$:

$$\leqslant (1+hL)((1+hL)\Delta_{j-2} + h\omega(h)) + h\omega(h) =$$

$$= (1+hL)^2\Delta_{j-2} + (1+hL)h\omega(h) + h\omega(h) \leqslant$$

Podobnie jak poprzednio, szacujemy wyrażenie Δ_{j-2}:

$$\leqslant (1+hL)^2((1+hL)\Delta_{j-3} + h\omega(h)) + (1+hL)h\omega(h) + h\omega(h) =$$

$$= (1+hL)^3\Delta_{j-3} + (1+hL)^2 h\omega(h) + (1+hL)h\omega(h) + h\omega(h) \leqslant$$

$$\leqslant \ldots \leqslant (1+hL)^j\Delta_0 + (1+hL)^{j-1}h\omega(h) + \ldots + (1+hL)h\omega(h) + h\omega(h) =$$

$$= (1 + hL)^j \Delta_0 + h\omega(h) \sum_{i=0}^{j-1} (1 + hL)^i$$

Otrzymaliśmy więc:

$$\Delta_j \leqslant (1 + hL)^j \Delta_0 + h\omega(h) \sum_{i=0}^{j-1} (1 + hL)^i.$$

Oczywiście formalnie rzecz biorąc, potrzebny jest teraz dowód indukcyjny poprawności tego oszacowania. Łatwiej jednak udowodnić podany niżej lemat.

Lemat 8.3.3. *Jeśli zachodzi $\Delta_{j+1} \leqslant A\Delta_j + B$, to zachodzi również $\Delta_j \leqslant A^j \Delta_0 + B \sum_{i=0}^{j-1} A^i$.*

Dowód lematu: Prosta indukcja po j. Krok I: dla $j = 1$ mamy $\Delta_1 \leqslant A\Delta_0 + B$, czyli teza i założenie mają tą samą postać. Więc lemat jest spełniony dla $j = 1$. Krok II: zakładamy że dla j lemat jest poprawny i pokażemy, że jest poprawny dla $j + 1$:

$$\Delta_{j+1} \leqslant A(\Delta_j) + B \leqslant A(A^j \Delta_0 + B \sum_{i=0}^{j-1} A^i) + B =$$

$$= A^{j+1}\Delta_0 + B \sum_{i=1}^{j} A^j + B = A^{j+1}\Delta_0 + B \sum_{i=0}^{j} A^j.$$

Czyli lemat jest również poprawny dla $j+1$. Zgodnie z zasadą indukcji matematycznej, lemat jest prawdziwy. □

Wróćmy do naszego oszacowania. Zauważmy, że wzór można jeszcze uprościć, ze względu na fakt iż $\Delta_0 = 0$. Dzieje się tak, ze względu na to, że w metodzie Eulera węzeł o numerze 0 dany jest w warunku początkowym zagadnienia, czyli nie jest on w żaden sposób przybliżony. Mamy więc:

$$\Delta_j \leqslant h\omega(h) \sum_{i=0}^{j-1} (1 + hL)^i =$$

Stosując wzór na skończoną sumę ciągu geometrycznego mamy:

$$= h\omega(h) \frac{1 - (1 + hL)^j}{1 - (1 + hL)} = h\omega(h) \frac{1 - (1 + hL)^j}{-hL} =$$

$$= \omega(h) \frac{1 - (1 + hL)^j}{-L} = \omega(h) \frac{(1 + hL)^j - 1}{L}.$$

Mamy więc:

$$\Delta_j \leqslant \frac{(1 + hL)^j - 1}{L} \omega(h).$$

Skorzystamy teraz z nierówności:

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} (1 + x) \leqslant e^x.$$

Możemy więc napisać, że $1 + hL \leqslant e^{hL}$. Mamy więc:

$$\Delta_j \leqslant \frac{e^{hLj} - 1}{L} \omega(h).$$

Zauważmy, że ze względu na to, że e^x jest rosnąca, to wyrażenie z prawej strony nierówności osiąga największą wartość dla $j = n$. Mamy więc:

$$\Delta_j \leqslant \frac{e^{hLn} - 1}{L}\omega(h).$$

Ze względu na to, iż $h = \frac{b-a}{n}$ możemy napisać:

$$\Delta_j \leqslant \frac{e^{(b-a)L}}{L}\omega(h).$$

Widać teraz, że jeśli przejdziemy do granicy $h \to 0^+$, to wyrażenie po prawej stronie nierówności dąży do zera (ze względu na funkcję $\omega(h)$). Zgodnie z twierdzeniem o trzech ciągach, Δ_j musi więc też zbiegać do zera, bo z jednej strony ograniczone jest przez zero, a z drugiej (zgodnie z naszym oszacowaniem) przez coś co zbiega do zera. Czyli rzeczywiście, jeśli liczba punktów podziału naszego odcinka rośnie, to h maleje, i błąd w każdym z punktów maleje. Metoda Eulera jest więc zbieżna. $\square$

Rozdział 9

Równania cząstkowe – równanie ciepła

9.1 Wprowadzenie

W rozdziale zajmiemy się nieco równaniami cząstkowymi. Zauważmy, że dotychczas wszystko co robiliśmy z równaniami różniczkowymi dotyczyło równań, w których niewiadoma była funkcją jednej zmiennej (jedno, bądź wielo wymiarową). W równaniach o których będziemy mówić tutaj, niewiadoma, jest funkcją wielu zmiennych i pojawiają się pochodne cząstkowe tychże funkcji. Na początku podamy kilka przykładów równań cząstkowych, co pozwoli nam zapoznać się z podstawowymi oznaczeniami i terminami.

9.1.1 Przykłady równań cząstkowych

Definicja 9.1.1 (laplasjan)**.** Laplasjanem funkcji $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy:

$$\Delta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}.$$

Uwaga 9.1.2. Często mamy do czynienia z sytuacją, gdy pierwsza zmienna funkcji, jest w jakiś sposób wyróżniona – na przykład oznacza czas. Wygodnie jest wówczas zdefiniować specjalną „wersje” laplasjanu dla funkcji $u(t, x_1, \dots, x_n)$:

$$\Delta_x u(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

W wielu przypadkach, taki właśnie laplasjan będziemy oznaczać przez Δu.

Przykład 9.1.3 (równanie Laplace'a)**.** Równanie cząstkowe może mieć postać:

$$\Delta u = 0,$$

dla $x \in \Omega$, z warunkiem: $u = \varphi$ na $\partial\Omega$ co oznacza, że funkcja u przyjmuje wartość φ na $\partial\Omega$ czyli na brzegu zbioru Ω.

Przykład 9.1.4 (równanie falowe)**.** Innym przykładem równania cząstkowego, może być, stosowane w fizyce, równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u = f.$$

Przykład 9.1.5 (równanie dyfuzji)**.** Równanie dyfuzji, ma postać:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = g.$$

W równaniu tym funkcja u oznacza temperaturę w punkcie $x = (x_1, \ldots, x_n)$ przestrzeni, w czasie t. Równanie to nazywamy również równaniem ciepła ze źródłem g.

Przykład 9.1.6 (równanie ciepła bez źródeł)**.** Równanie ciepła bez źródeł, którym będziemy się zajmować dalej w tym rozdziale, to równanie postaci:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = 0.$$

9.2 Słaba zasada maksimum.

Podamy teraz słabą zasadę maksimum dla równania przewodnictwa ciepła, które musi być dane z warunkiem brzegowo-początkowym w momencie $t = 0$ – tzn. dane są wartości funkcji na brzegu zbioru Ω dla $t = 0$. Zasadę nazywamy słabą, ponieważ, mówi ona, że wartość maksymalną funkcja osiąga na danym zbiorze, jednak nie gwarantuje, że wartość ta nie jest osiągana gdzieś indziej dodatkowo. Istnieje również silna zasada maksimum, która gwarantuje, że maksymalna wartość przyjmowana jest tylko w danym konkretnym zbiorze i nigdzie więcej, jednak nie mieści się ona w zakresie tego podręcznika.

Twierdzenie 9.2.1 (słaba zasada maksimum dla równania przewodnictwa ciepła)**.** *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym i ograniczonym. Załóżmy, że funkcja u spełnia równanie $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u$, dla $t \in [0,T]$ i $x \in \bar{\Omega}$. Niech funkcje $u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}$ dla $j,k = 1,2,\ldots,n$ są ciągłe na $[0,T] \times \bar{\Omega}$. Wtedy:*

$$\max_{t \in [0,T], x \in \bar{\Omega}} u(t,x) = \max_{(t,x) \in \Sigma} u(t,x),$$

gdzie $\Sigma = (\{0\} \times \Omega) \cup ([0,T] \times \partial\Omega)$.

Uwaga 9.2.2 (oznaczenia)**.** W treści twierdzenia pojawiają się następujące oznaczenia: $\bar{\Omega}$ – oznacza zbiór Ω wraz z brzegiem. Taki zbiór $\bar{\Omega}$ nazywamy domknięciem zbioru Ω (jest to zbiór domknięty). Brzeg zbioru Ω oznaczamy natomiast przez $\partial\Omega$. Przy tak przyjętych oznaczeniach zachodzi wzór: $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Plan dowodu:

1. Zakładamy, że dane jest rozwiązanie u.
2. Konstruujemy nową funkcję v zależną od u.
3. Zakładamy, że funkcja v przyjmuje wartość maksymalną nie na zbiorze Σ ale gdzieś „w środku”.
4. Dochodzimy do sprzeczności z definicją funkcji v.
5. Pokazujemy, że skoro v osiąga maksimum na brzegu, to u również.

Dowód. Niech $\alpha > 0$. Zdefiniujemy funkcją v, która będzie zależna od u (które spełnia założenia twierdzenia):

$$v(t,x) = u(t,x) + \alpha||x||^2.$$

Gdzie $||x||$ jest normą euklidesową, więc: $||x||^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$. Wstawiając v do równania ciepła, mamy:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \alpha\Delta||x||^2 =$$

$$= -\alpha\Delta||x||^2 = -\alpha 2n < 0 \qquad (**)$$

W powyższych wyliczeniach korzystamy z faktu:

$$\Delta||x||^2 = \Delta(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 2 + 2 + \ldots + 2 = 2n.$$

Który wynika wprost z tego, że $\Delta x_i^2 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 x_i^2}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 x_i^2}{\partial x_i^2} = 2$.

Oczywiści z definicji v wynika, że $v(t,x) \geqslant u(t,x)$. Niech t_0, x_0 będą takie, że $v(t_0,x_0) = \max_{t,x} v(t,x)$. Załóżmy, że $(t_0,x_0) \notin \Sigma$, czyli $t_0 \in (0,T], x_0 \in \Omega$.

Rozważmy teraz funkcję $f\colon (0,T] \to \mathbb{R}$ daną wzorem $f(t) = v(t,x_0)$. Pochodna funkcji f wyraża się wzorem: $f'(t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t,x_0)$. Skoro dla (t_0,x_0) funkcja v przyjmuje wartość maksymalną, to na pewno $f'(t_0) \geqslant 0$, przy czym jeśli $t_0 \neq T$ to $f'(t_0) = 0$ (bo funkcja f przyjmuje maksimum, czyli pochodna musi się zerować), a jeśli $t_0 = T$ to $f'(t_0)$ może również być dodatnia[1] (chociaż nie musi).

Rozważmy n funkcji $g_j\colon (x_{0j} - \delta_j; x_{0j} + \delta_j) \to \mathbb{R}$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$, gdzie δ_j jest pewną ustaloną liczbą, oraz $g_j(x) = v(t_0, x_{01}, \ldots, x_{0j-1}, x, x_{0j+1}, \ldots, x_{0n})$. Czyli funkcja g_j powstaje z funkcji v przez „zamrożenie" wszystkich współrzędnych poza j-tą współrzędną x. Oczywiście zachodzi:

$$\forall_{j=1,2,\ldots,n} \quad g_j''(x) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}.$$

Można udowodnić, że

$$\forall_{j=1,2,\ldots,n} \quad g_j''(x_{0j}) \leqslant 0.$$

Wynika to na przykład z wzoru Taylora. Mamy więc:

$$\forall_{j=1,2,\ldots,n} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(t_0,x_0) \leqslant 0.$$

A stąd wynika, że:

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t_0,x_0) - \Delta v(t_0,x_0) \geqslant 0.$$

Zauważmy, że daje to jednak sprzeczność z definicją funkcji v, a konkretnie z linijką oznaczoną $(**)$. Stąd wniosek, iż założenie $(t_0,x_0) \notin \Sigma$ było niepoprawne, czyli $(t_0,x_0) \in \Sigma$.

[1]Można sobie łatwo wyobrazić tą sytuację. Funkcja f jest funkcją ciągłą jednej zmiennej i określona jest na przedziale, który jest z jednej strony domknięty. Zakładamy, ze przyjmuje ona wartość maksymalną, gdzieś dla $t \in (0,T]$, czyli jeśli przyjmuje ją dla $t \in (0,T)$ to jest to maksimum lokalne, czyli pochodna się zeruje. Jeśli jednak wartość maksymalna przyjmowana jest dla $t = T$, to nie musi tam być ekstremum, jednak funkcja f musi być niemalejąca dla t bliskich T.

Oznaczamy teraz $M_u := \max_{t\in[0,T],x\in\bar{\Omega}} u(t,x)$, oraz $N_u := \max_{(t,x)\in\Sigma} u(t,x)$. Z powyższych rozważań wiemy, że:

$$M_v = N_v \qquad (*).$$

Zauważmy również, że jeśli $\alpha \to 0^+$, to $v \to u$. Jeśli więc w równości $(*)$ przejdziemy do granicy $\alpha \to 0^+$, to otrzymamy $M_u = N_u$. Czyli funkcja u osiąga maksimum na zbiorze Σ. $\square$

9.2.1 Wnioski

Okazuje się, iż ze słabej zasady maksimum możemy wysnuć ciekawe (i przydatne) wnioski.

Wniosek 9.2.3. Równanie ciepła, z warunkiem początkowym zerowym, danym dla zbioru Σ, ma tylko rozwiązanie zerowe.

Dowód wniosku: Z twierdzenia (i z dowodu) wiemy, że $M_u = N_u$. A skoro dany jest warunek zerowy na Σ, to $N_u = 0$, czyli $u \leqslant 0$ Zauważmy, że funkcja $-u$ również spełnia to zagadnienie, czyli $M_{-u} = N_{-u} = 0$. No ale stąd mamy $-u \leqslant 0$. Musi więc zachodzić $u \equiv 0$. $\square$

Wniosek 9.2.4. Równanie $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ na $[0,T] \times \bar{\Omega}$ z warunkiem $u = \varphi$ na Σ, posiada co najwyżej jedno rozwiązanie.

Dowód wniosku: Niech funkcje u i w spełniają to zagadnienie. Niech $z = u - w$. Wtedy:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0 & \text{na } [0,T] \times \bar{\Omega} \\ z = 0 & \text{na } \Sigma \end{cases}$$

Z poprzedniego wniosku wiemy, że wtedy musi zachodzić $z \equiv 0$, czyli $u \equiv w$. $\square$

Uwaga 9.2.5. Powyższe twierdzenia nie gwarantują jednak istnienia rozwiązania!

9.3 Zasada maksimum dla zbiorów nieograniczonych.

W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się równaniem ciepła, które określone było na pewnym, ograniczonym zbiorze Ω. Teraz sformułujemy twierdzenie, w którym zbiór ten będzie równy $\mathbb{R}^n$.

Twierdzenie 9.3.1 (słaba zasada maksimum dla równania ciepła na zbiorze nieograniczonym)**.** *Niech u spełnia równanie ciepła, oraz niech u i pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu będą ciągłe. Wtedy:*

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(0,x).$$

Plan dowodu:

1. Definiujemy funkcję v zależną od u, która też jest rozwiązaniem równania.
2. Zakładamy, że:
$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} u(t,x) = \sup_{t\in(0,T],x\in\mathbb{R}^n} u(t,x),$$
czyli, że maksimum nie jest przyjmowane gdy $t = 0$.
3. Korzystamy z zależności między u i v, oraz z poprzedniego twierdzenia. Dzielimy dziedzinę v na „kawałki”. Na jednym z kawałków stosujemy słabą zasadę maksimum dla zbioru ograniczonego i wykazujemy, że założenie z punktu 2 prowadzi do sprzeczności.

Dowód. Zdefiniujmy nową funkcję $v(t,x) = u(t,x) - \alpha(2nt + ||x||^2)$, gdzie $||.||$ jest normą euklidesową, oraz $\alpha > 0$. Takie v jest również rozwiązaniem rozważanego równania, ponieważ: $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - 2n\alpha$, $\Delta v = \Delta u - \alpha\Delta||x||^2 = \Delta u - 2n\alpha$. No a stąd:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0.$$

Wprowadźmy oznaczenia: $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(0,x)$, oraz $M = \sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} u(t,x)$. Wiemy na pewno, że spełnione jest $M_0 \leqslant M$. Załóżmy jednak, że zachodzi $M_0 < M$. Pokażemy, że takie założenie prowadzi do sprzeczności. Skorzystamy w tym celu, z funkcji v.

Oszacujmy wartość $v(t,x)$:

$$v(t,x) \leqslant u(t,x) - \alpha||x||^2 \leqslant M - \alpha||x||^2.$$

Wyznaczmy teraz zbiór takich x, że jest spełnione $v(t,x) \leqslant M_0$:

$$v(t,x) \leqslant M - \alpha||x||^2 \leqslant M_0.$$

Nierówność: $M - \alpha||x||^2 \leqslant M_0$ prowadzi nas do nierówności $(*)$:

$$||x|| \geqslant \sqrt{\frac{M - M_0}{\alpha}}.$$

Oznaczmy teraz zbiór Ω:

$$\Omega := K\left(\Theta, \sqrt{\frac{M - M_0}{\alpha}}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < \sqrt{\frac{M - M_0}{\alpha}}\right\}.$$

Zgodnie z tym co policzyliśmy wcześniej, wewnątrz Ω może zachodzić $v(t,x) > M_0$, a poza nim $v(t,x) \leqslant M_0$.

Zauważmy teraz, iż jest spełnione na pewno:

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} v(t,x) = \max\{\underbrace{\sup_{t\in[0,T];x\notin\bar{\Omega}} v(t,x)}_{(1)};\ \underbrace{\sup_{t\in[0,T];x\in\bar{\Omega}} v(t,x)}_{(2)}\}.$$

Niech teraz:

$$\Sigma := \{0\} \times \Omega \cup [0,T] \times \partial\Omega.$$

Z nierówności $(*)$ wynika, iż (1) równe jest M_0. Aby oszacować (2) stosujemy słabą zasadę maksimum dla v i Ω:

$$(2) = \max_{(t,x)\in\Sigma} v(t,x).$$

No ale przy naszych oznaczeniach:

$$\max_{(t,x)\in\Sigma} v(t,x) \leqslant M_0,$$

ponieważ zgodnie z definicją, dla dowolnego t, na brzegu Ω funkcja v przyjmuje wartość mniejszą bądź równą M_0, a dla $t = 0$ również wartość v nie może być większa od M_0. Czyli na całym Σ wartość jest co najwyżej równa M_0. Mamy więc:

$$\sup_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} v(t,x) \leqslant M_0,$$

co znaczy dokładnie tyle, że

$$\forall_{t\in[0,T],x\in\mathbb{R}^n} \quad v(t,x) \leqslant M_0.$$

No ale w związku z tym:

$$\forall_{t,x,\alpha} u(t,x) = v(t,x) + \alpha(2nt + ||x||^2) \leqslant$$

$$\leqslant M_0 + \alpha(2nt + ||x||^2).$$

Przechodząc do granicy $\alpha \to 0^+$ otrzymujemy:

$$u(t,x) \leqslant M_0,$$

dla dowolnego $t \in [0,T]$ oraz $x \in \mathbb{R}^n$.

Doszliśmy więc, do tego, że $M \leqslant M_0$, co daje sprzeczność. Założenie $M_0 < M$ okazało się więc błędne. Tym samym, wykazaliśmy, że:

$$M = M_0. \qquad \square$$