7 Prawa wielkich liczb i twierdzenia graniczne

Słabe prawo wielkich liczb. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, $m_k = EX_k$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$. Jeżeli ciąg $\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)}{n}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0 to mówimy, że X_n spełnia słabe prawo wielkich liczb (SPWL). Warunek z definicji można równoważnie zapisać: $\forall_{\epsilon>0} \lim_{n\to\infty} P(|\frac{S_n - ES_n}{n}| \geqslant \epsilon) = 0$.

Tw. Czebyszewa Ciąg niezależnych zmiennych losowych X_n spełnia SPWL, gdy istnieją wartości oczekiwane $E(X_i)$ i wariancje σ_i^2 zmiennych X_i istnieją i są wspólnie ograniczone (tzn. $\exists_{\sigma^2}\forall_n Var(S_n) \leqslant \sigma^2$).

Tw. Markowa Ciąg zmiennych losowych X_n spełnia SPWL, gdy istnieją wartości oczekiwane $E(X_i)$ i wariancje σ_i^2 zmiennych X_i oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{Var(S_n)}{n^2} = 0$.

Wniosek Jeśli X_n ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, dla którego istnieje wariancja, to ciąg ten spełnia SPWL.

Tw. Chinczyna Ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i wspólnej wartości oczekiwanej spełnia SPWL.

Mocne prawo wielkich liczb. X_n jest ciągiem zmiennych losowych, $m_k = EX_k$. Ciąg X_n spełnia mocne prawo wielkich liczb (MPWL), gdy ciąg $\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m_k)}{n}$ zbiega do 0 z prawdopodobieństwem jeden.
Uwaga. Jeśli ciąg spełnia MPWL to spełnia też SPWL.

Tw. Kołomogorowa Jeśli X_n są niezależne, $Var(X_n)$ istnieją oraz szereg $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n)}{n^2}$ jest zbieżny, to $(X_n)_n$ spełnia MPWL.

Wniosek Jeśli $(X_n)_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i $\forall_n Var(X_n) = \sigma^2 < +\infty$, to X_n spełnia MPWL.

Wniosek Jeśli X_n spełnia założenia tw. Czybyszewa to spełnia MPWL.

Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Levy'ego. Jeżeli $\{X_n\}$ jest losowym ciągiem niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie, o wartości przeciętnej α_1 i skończonej wariancji $\sigma^2 > 0$, to ciąg (F_n) dystrybuant standaryzowanych średnich arytmetycznych $\overline{X_n}$ (standaryzowanych sum $\sum_{i=1}^{n} X_i$) $Y_n = \frac{\overline{X_n} - \alpha_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\alpha_1}{\sigma\sqrt{n}}$ jest zbieżny do dystrybuanty Φ rozkładu $N(0,1)$: $\lim_{n\to\infty} F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \equiv \Phi(y)$

1 Podstawy teorii miary probabilistycznej

1.1 Zbiory mierzalne – σ–ciało zbiorów

Załóżmy, że mamy jakiś zbiór Ω. Niech $\mathcal{F}$ będzie taką rodziną podzbiorów Ω, że:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$
- $\forall_{i\in I} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{F}$

Wtedy rodzinę $\mathcal{F}$ nazywamy σ–**ciałem zbiorów**.

Gdy dana jest pewna rodzina $\mathcal{A}$ podzbiorów zbioru Ω, σ–ciałem generowanym przez tą rodzinę, nazywamy najmniejsze (w sensie zawierania) σ–ciało zawierające $\mathcal{A}$ i oznaczamy $\sigma(\mathcal{A})$. Można udowodnić, że $\sigma(\mathcal{A})$ jest przekrojem wszystkich σ–ciał zawierających $\mathcal{A}$. Gdy $\mathcal{A}$ ma n elementów i są one parami rozłączne, oraz spełniają warunek $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ to $\sigma(\mathcal{A})$ ma 2^n elementów.

1.2 Zbiory borelowskie

Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wówczas σ–ciało generowane przez wszystkie zbiory otwarte zawarte w $\mathbb{R}$ oznaczmy przez $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i nazywamy **rodziną zbiorów borelowskich**. Rodzina ta zawiera w szczególności wszystkie przedziały (a, b).

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją borelowską**, gdy przeciwobrazy zbiorów postaci $(-\infty, a)$ są borelowskie. W szczególności wszystkie funkcje ciągłe, są borelowskie (ale nie wszystkie funkcje borelowskie są ciągłe).

1.3 Miara probabilistyczna

Niech dany będzie pewien zbiór Ω i σ–ciało $\mathcal{F}$. Funkcję $P : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}_+}$, spełniającą:

- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$ dla parami rozłącznych zbiorów A_i.

nazywamy **miarą**. Jeśli dodatkowo spełniony jest warunek: $P(X) = 1$ to P nazywamy **miarą probabilistyczną** lub prawdopodobieństwem.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

2 Rozkład prawdopodobieństwa

2.1 Rozkład dyskretny

Niech $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa P jest dyskretny, jeśli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $A \in \mathcal{F}$ taki, że $P(A) = 1$.

2.2 Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa

Rozpatrzmy przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$. Funkcję $F : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, daną wzorem: $F(t) = P((-\infty, t))$ nazywamy **dystrybuantą** rozkładu P. Dystrybuanta posiada następujące własności:

- $\forall_{t\in\mathbb{R}} 0 \leqslant F(t) \leqslant 1$,
- F jest lewostronnie ciągła,
- F jest niemalejąca,
- $F(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$,
- $F(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} F(t) = 1$.

Punkty nieciągłości (punkty skokowe) F są tzw. **nośnikami prawdopodobieństwa** – tzn. prawdopodobieństwo każdego takiego punktu jest niezerowe. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa jest dyskretny, to dystrybuanta jest ponadto stała między punktami skokowymi.

2.3 Rozkład ciągły

Mówimy, że miara probabilistyczna P określona na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jest typu ciągłego, gdy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, taka, że $P(A) = \int_A f(x)dx$ dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Funkcję f nazywamy gęstością miary P.

Własności gęstości miary probabilistycznej

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$,
- $f(x) \geqslant 0$ prawie wszędzie (czyli zbiór punktów w których to nie jest prawda, ma miarę równą 0).

Każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ która spełnia te własności jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa.
Niech f będzie gęstością, a F dystrybuantą. Wtedy zachodzi:

$$F(x) = P((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Dystrybuanta rozkładu typu ciągłego jest funkcją ciągłą. W punktach ciągłości f istnieje pochodna dystrybuanty i zachodzi: $f(x) = F'(x)$.

Uwaga. Nie każda ciągła dystrybuanta jest dystrybuantą rozkładu typu ciągłego. Istnieją rozkłady które nie są ani ciągłe ani dyskretne.

3 Zmienna losowa

Zmienną losową nazywamy dowolną funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ taką, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}\{\omega : X(\omega) < x\} \in \mathbb{F}$. W przypadku gdy $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, dowolna funkcja $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową.

3.1 Definicje podstawowe

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, oraz pewna zmienna losowa X. Wówczas funkcja $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ jest miarą probabilistyczną, oraz $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Miarę P_X nazywamy **prawdopodobieństwem generowanym przez zmienną losową X**.

Mając miarę P_X odpowiadającą pewnej zmiennej losowej X możemy więc zdefiniować pojęcie **dystrybuanty zmiennej losowej**. Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X\colon \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ daną wzorem[1]:

$$F_X(t) = P_X((-\infty, t)) = P(X^{-1}(-\infty, t)) = P(X < t).$$

3.2 Dyskretna zmienna losowa

Zmienną losową X nazywamy **zmienną typu dyskretnego**, gdy istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, taki, że $P_X(B) = 1$.

3.3 Ciągła zmienna losowa

Zmienną losową X **zmienną typu ciągłego**, gdy istnieje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa P_X.

3.4 Funkcja zmiennej losowej

Jeśli X jest zmienną losową, a g funkcją borelowską, to złożenie $Y = g \circ X$ jest również zmienną losową. Ponadto zachodzi:

$$P_Y(B) = P_{g\circ X}(B) = P(\{\omega : g(X(\omega)) \in B\}) = P(\{\omega : X(\omega) \in g^{-1}(B)\}) = P_X(g^{-1}(B))$$

Ponadto jeśli X jest typu ciągłego to mamy:

$$F_Y(y) = \int_{\{x:g(x)<y\}} f_X(x)dx.$$

Jeśli dodatkowo, wiemy że g jest różniczkowalna i ściśle rosnąca ($g'(x) \neq 0$), to:

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(-\infty)}^{y} (g^{-1}(t))' f_X(g^{-1}(t))dt$$

oraz

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y))\frac{1}{g'(g^{-1}(y))}.$$

3.5 Niezależne zmienne losowe

Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są **niezależne** jeżeli dla dowolnych zbiorów borelowskich $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zachodzi:

$$P(X_1 = B_1 \wedge X_2 = B_2 \wedge \ldots \wedge X_n = B_n) = P(X_1 = B_1)P(X_2 = B_2)\cdots P(X_n = B_n)$$

[1]Wzór podany jest na kilka sposobów – stosuje się zamiennie kilka równoważnych form zapisu.

5.3 Rozkład brzegowy

Niech $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ wektor losowy o dystrybuancie F. Wówczas funkcje $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y)$ oraz $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y)$ są dystrybuantami rozkładów na $\mathbb{R}$. Rozkłady te nazywamy brzegowymi.

Jeśli dodatkowo wektor losowy posiada gęstość f, to funkcje $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dy$ oraz $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx$ są gęstościami rozkładów brzegowych na $\mathbb{R}$.

5.4 Parametry liczbowe

Wartość oczekiwana Jeśli $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ jest wektorem losowym, to wektor liczb $(EX_1, EX_2, \ldots, EX_n)$ nazywamy wartością średnią (oczekiwaną) wektora X. Jest ona określona jeśli wszystkie wartości oczekiwane EX_i istnieją.

Jeśli $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcja borelowska, oraz X wektor losowy typu ciągłego, to $E\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)f(x)dx$.

5.5 Przykłady

Gęstości sumy, iloczynu, ilorazu zmiennych losowych:

1. $U = X + Y$: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x, u - x)dx$; gdy X, Y-niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)f_2(u - x)dx$
2. $U = XY$: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \frac{u}{x})\frac{1}{|x|}dx$; gdy X, Y-niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)f_2(\frac{u}{x})\frac{1}{|x|}dx$
3. $U = \frac{X}{Y}$: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(uy, y)|y|dy$; gdy X, Y-niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(uy)f_2(y)|y|dy$

Dwuwymiarowy rozkład normalny ma gęstość daną wzorem:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} exp\Big\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big]\Big\} \quad \text{dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gdzie: $\mu_1 = EX$, $\mu_2 = EY$, $\sigma_1 = \sqrt{D^2X} > 0$, $\sigma_2 = \sqrt{D^2Y} > 0$, ρ–współczynnik korelacji zm.los. X i Y, przy czym $|\rho| < 1$.

6 Zbieżność ciągów zmiennych losowych

1. Zbieżność z prawdopodobieństwem 1 (prawie na pewno, prawie wszędzie): $P(\{\omega : \lim_{n\to\inf} X_n(\omega)\ X(\omega)\}) = 1$. Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(p.n.)]{z\ pr.\ 1} X$.
2. Zbieżność według prawdopodobieństwa: $\forall_{\epsilon>0} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geqslant \epsilon\}) = 0$. Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(P)]{wg\ pr.} X$.
3. Zbieżność według dystrybuant (zbieżność względem rozkładu, słabo zbieżny) – ciąg dystrybuant F_n jest zbieżny do dystrybuanty F w każdym punkcie ciągłości F. Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(s)]{D} X$.

Rodzaje zbieżności wymienione są od najsilniejszej do najsłabszej. Ze zbieżności z prawdopodobieństwem 1 wynika zbieżność według prawdopodobieństwa, a z niej wynika zbieżność według dystrybuant.

Następujące warunki są równoważne ze zbieżnością z prawdopodobieństwem 1:

- $\forall_{\epsilon>0} \lim_{k\to\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty}\{|X_n - X| < \epsilon\} = 1$
- $\forall_{\epsilon>0} \lim_{k\to\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty}\{|X_n - X| \geqslant \epsilon\} = 0$

6.1 Twierdzenie o ciągłości

Ciąg $(X_n)_n$ jest zbieżny według rozkładu do X wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg funkcji charakterystycznych φ_n jest zbieżny w każdym punkcie do funkcji ciągłej φ. Takie φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej X.

Normalny (Gaussowski)

- Oznaczenie $N(p, \sigma^2)$, $N(0,1)$ nazywamy standardowym.
- $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t)^2}{2}dt} = \Phi(x)$
- $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}X = m$
- $Var(X) = \sigma^2$
- Dla standardowego: $\varphi(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$

Cauchy'ego

- Parametry θ, λ
- $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left[1+(\frac{x-\theta}{\lambda})^2)\right]}$
- $\varphi(t) = e^{-|t|}$
- Wartość oczekiwana i wariancja są niezdefiniowane – nie istnieją gdyż całki rozbiegają do nieskończoności.
- Uwaga. Jeśli X i Y mają standardowy rozkład normalny to zmienna X/Y ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $\theta = 0$ i $\lambda = 1$

5 Zmienne losowe wielowymiarowe

Wektorem losowym lub zmienną losową wielowymiarową nazywamy dowolną funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, która spełnia warunek: $\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)} X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, czyli przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego z przestrzeni[2] $\mathbb{R}^n$ musi należeć do σ–ciała.

Każdą funkcję wielowymiarową $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ możemy przestawić w postaci: $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, gdzie dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ $X_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Funkcja X jest zmienną losową wielowymiarową $\iff$ każde X_i jest („zwykłą") zmienną losową.

Odwzorowanie $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nazywamy funkcją borelowską gdy przeciwobrazy zbiorów borelowskich z R^m są zbiorami borelowskim w $\mathbb{R}^n$.

Złożenie $\varphi \circ X$, gdzie X wektor losowy a φ funkcja borelowska, jest też wektorem losowym.

Wektor losowy jest wektorem **typu dyskretnego**, gdy istnieje taki co najwyżej przeliczalny zbiór B borelowski, że $P_X(B) = 1$.

Wektor losowy jest wektorem **typu ciągłego**, gdy istnieje funkcja f taka, że $P_X(B) = \int \ldots \int_B f(x)dx$, dla dowolnego B borelowskiego. Funkcję tą nazywamy gęstością (musi ona spełniać dodatkowe warunki, o czym niżej).

5.1 Dystrybuanta

Gdy $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym, dystrybuanta ma postać: $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = P_X((-\infty, t_1) \times (-\infty, t_2) \times \ldots (-\infty, t_n))$. W przypadku gdy $n = 2$ mamy: $F(x,y) = P(X < x, Y < y) \quad dla (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Własności

- Jest lewostronnie ciągła i niemalejąca ze względu na każdą zmienną z osoba.
- $\forall_{x \in \mathbb{R}} \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0, \quad \forall_{y \in \mathbb{R}} \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$
- $\lim_{x \to \infty, y \to \infty} F(x,y) = 1$
- Dla dowolnych punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ takich, że $x_1 \leqslant x_2$ i $y_1 \leqslant y_2$ zachodzi nierówność $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geqslant 0$

5.2 Gęstość

Własności

- $P_X(B) = \int \ldots \int_B f(x)dx$
- $F(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \ldots \int_{-\infty}^{t_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n$
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = 1$
- w punktach ciągłości: $f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F_x(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$.

Niezależność zmiennych: $\forall_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} F(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$ lub $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

[2] Zbiory borelowskie w $\mathbb{R}^n$, to σ–ciało zbiorów zawierające wszystkie zbiory otwarte z tej przestrzeni. Generowane jest np. przez wszystkie otwarte kostki (iloczyny kartezjańskie przedziałów otwartych).

3.6 Charakterystyki zmiennych losowych

3.6.1 Wartość oczekiwana

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę EX.
W przypadku, gdy X jest zmienną typu ciągłego wartość oczekiwana ma wartość:

$$EX = \sum_{i \in I} x_i p_i.$$

o ile szereg jest bezwzględnie zbieżny (jeśli nie jest to EX nie istnieje).
W przypadku, gdy X jest zmienną typu ciągłego o gęstości f, wartość oczekiwana wyraża się wzorem:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

i istnieje, gdy całka jest zbieżna.

Własności wartości oczekiwanej

- $X \geqslant 0 \Rightarrow EX \geqslant 0$
- $|EX| \leqslant E|X|$
- dla $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $E(aX + bY) = aEX + bEY$
- dla $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $Ea = a$
- $E(X - EX) = 0$
- $E(XY) = EX * EY$, gdy X i Y są niezależne

Wartość oczekiwana z funkcji zmiennej losowej Jeśli φ jest funkcją borelowską, a zmienna losowa X jest typu dyskretnego, to:

$$E\varphi(X) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) P(X = x_i)$$

a gdy X jest typu ciągłego, o gęstości f, to:

$$E\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx$$

3.6.2 Wariancja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę $Var(X)$ daną wzorem: $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.
W przypadku zmiennej losowej X typu **dyskretnego** zachodzi wzór: $Var(X) = \sum_{i \in I} (x_i - EX)^2 p_i$.

Własności wariancji

- $Var(X) \geqslant 0$
- $Var(cX) = c^2 Var(X)$ dla $c \in \mathbb{R}$
- $Var(X + c) = Var(X)$
- $Var(X) = 0 \iff \exists_c P(X = c) = 1$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$ gdy X i Y są niezależne

Liczbę $\sqrt{VarX}$ nazywa się czasem **odchyleniem standardowym** i oznacza przez $\sigma(X)$.

3.6.3 Kowariancja i współczynnik korelacji

Niech X, Y będą zmiennymi losowymi. Liczbę $cov(X,Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$ nazywamy kowariancją zmiennych X i Y. Kowariancję możemy wyliczyć również ze wzoru: $cov(X,Y) = EXY - EXEY$. Zauważmy, że gdy $X = Y$ to $cov(X,Y) = cov(X,X) = Var(X)$.
TW. $|cov(X,Y)| \leqslant \sqrt{Var(X)Var(Y)}$
Ponadto zachodzi: $cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot cov(X,Y)$, $cov(a_1X_1 + a_2X_2, a_3X_3 + a_4X_4) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=3}^{4} a_i a_j cov(X_i, X_j)$.
Liczbę $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$ nazywamy **współczynnikiem korelacji** zmiennych X i Y.
Gdy $\rho(X,Y) = 0$, to mówimy, że zmienne są **nieskorelowane**. Gdy $\rho(X,Y) = \pm 1$ to $P(X = aY + b) = 1$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

3.6.4 Inne charakterystyki liczbowe

Zmienna typu dyskretnego

Moment zwykły rzędu r $\alpha_r = EX^r = \sum_{i\in I} x_i^r p_i$

Moment centralny rzędu r $\mu_r = E(X-\alpha_1)^r = \sum_{i\in I}(x_i-\alpha_1)^r p_i$

Mediana każda liczba $x_{0,5}$ spełniająca warunki $F(x_{0,5}) \leqslant 0,5 \leqslant \lim_{x\to x_{0,5}} F(x)$; $\sum_{x_i<x_{0,5}} p_i \leqslant 0,5 \leqslant \sum_{x_i\leqslant x_{0,5}} p_i$

Kwantyl rzędu p każda liczba $x_p, 0<p<1$ spełniająca warunki $F(x_p) \leqslant p \leqslant \lim_{x\to x_p} F(x)$; $\sum_{x_i<x_p} p_i \leqslant p \leqslant \sum_{x_i\leqslant x_p} p_i$

Dominanta m_0 – punkt skokowy x_k, różny od $min(x_i)$ i $max(x_i)$, dla którego $p(x_k)$ osiąga maksimum absolutne.

Zmienna typu ciągłego

Moment zwykły rzędu r $\alpha_r = EX^r = \int_{\mathbb{R}} x^r f(x)dx$

Moment centralny rzędu r $\mu_r = E(X-\alpha_1)^r = \int_{\mathbb{R}}(x-\alpha_1)^r f(x)dx$

Mediana $F(x_{0,5}) = 0,5$

Kwantyl rzędu p $F(x_p) = p$

Dominanta m_0 – odcięta maksimum absolutnego gęstości.

3.7 Funkcja charakterystyczna

Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję zespoloną $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ daną wzorem $\varphi(t) = Ee^{itX}$. W przypadku gdy X jest zmienną losową typu dyskretnego, funkcja charakterystyczna wyraża się wzorem:

$$\varphi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}$$

W przypadku ciągłej zmiennej losowej X o gęstości f mamy natomiast:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)dx$$

Własności funkcji charakterystycznej

1. $\varphi(0) = 1$.
2. $\forall_{t\in\mathbb{R}}\varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, gdzie $\overline{\varphi(-t)}$ oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z $\varphi(-t)$.
3. $\forall_{t\in\mathbb{R}}|\varphi(t)| \leqslant 1$.
4. φ jest funkcją jednostajnie ciągłą (co w szczególności oznacza, że jest ona ciągła).
5. φ jest funkcją rzeczywistą $\Leftrightarrow$ rozkład zmiennej losowej X jest symetryczny względem $x=0$.
6. Jeśli $\varphi_X(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X to, funkcją charakterystyczną zmiennej $Y = aX+b$ jest funkcja $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$.
7. Jeżeli istnieje k-ty moment zmiennej losowej X o funkcji charakterystycznej φ, to φ jest k-krotnie różniczkowalna i zachodzi związek $\alpha_k = EX^k = \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0)$
8. Funkcja charakterystyczna skończonej sumy niezależnych zmiennych losowych równa się iloczynowi funkcji charakterystycznych tych zmiennych.

TW. Niech F będzie dystrybuantą, zaś φ funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X. Wtedy:

1. Dla $a<b$ takich że, F jest ciągła (w tych punktach) zachodzi

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)dt = F(b)-F(a)$$

2. Jeśli ponadto $\int_{\mathbb{R}}|\varphi(t)|dt \leqslant +\infty$, to X ma rozkład typu ciągłego, o gęstości $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi(t)dt$.

Wniosek. Funkcja charakterystyczna jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej.
TW. Jeśli φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X, okresową o okresie $T=2\pi$, to X jest zmienną typu dyskretnego o wartościach całkowitych oraz $P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi(t)dt$, $k\in\mathbb{Z}$.

4 Katalog zmiennych losowych

4.1 Dyskretne

Równomierny

- $p_i = \frac{1}{n}$
- $\mathbb{E}X = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

Jednopunktowy

- $P(x_0) = 1$
- $\mathbb{E}X = x_0$
- $Var(X) = 0$
- $\varphi(t) = e^{ita}$

Zero-jedynkowy

- $P(1) = p, P(0) = 1-p = q$
- $\mathbb{E}X = p$
- $Var(X) = pq$
- $\varphi(t) = pe^{it}+q$

Dwumianowy (Bernouliego)

- Oznaczenie: $B(n,p)$, n-liczba prób, p-prawdopodobieństwo sukcesu,
- $P(k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$
- $\mathbb{E}X = np$
- $Var(X) = npq$
- $\varphi(t) = (pe^{it}+q)^n$

Poissona

- Oznaczenie: $\mathcal{P}(\lambda)$
- Parametr: $\lambda > 0$
- $P(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k\in\mathbb{N}$
- $\mathbb{E}X = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Geometryczny

- Oznaczenie: $Geom(p)$.
- $P(1) = p,\ P(0) = 1-p$
- $\mathbb{E}X = p$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

4.2 Ciągłe

Jednostajny(równomierny)

- $J((a,b))$, gdzie (a,b) – przedział
- $F(x) = \begin{cases}\frac{x+a}{b-a} & \text{dla } a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{dla } x<a\\ 1 & \text{dla } x>b\end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{b-a} & \text{dla } a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases}$
- $\mathbb{E}X = \frac{b-a}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Dla $J((0,a))$: $\varphi(t) = \frac{e^{iat}-1}{iat}$
- Dla $J((-a,a))$: $\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}$

Wykładniczy

- Parametr $\lambda > 0$
- $F(x) = \begin{cases}1-e^{-\lambda x} & \text{dla } x\geqslant 0\\ 0 & \text{dla } x<0\end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x\geqslant 0\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases}$
- $\varphi(t) = \frac{\lambda}{1+t^2}$

Gamma

- Oznaczenie: $\Gamma(p,\alpha)$
- $f(x) = \begin{cases}\frac{\alpha^p}{\Gamma(p)}x^{p-1}e^{-\alpha x} & \text{dla } x>0\\ 0 & \text{dla pozostałych } x\end{cases}$
  gdzie $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, $n = 1,2,3,\ldots$, $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\varphi(t) = (1-\frac{it}{\alpha})^{-p}$
- Uwaga: $\Gamma(1,\alpha)$ to rozkład wykładniczy.
- Uwaga: $\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$ to tak zwany rozkład χ^2 (chi kwadrat) z n stopniami swobody.

Beta

- Parametry: $p,q>0$
- $f(x) = \begin{cases}\frac{1}{\beta(p,q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1} & x\in(0,1)\\ 0 & w\ p.p.\end{cases}$
  $\beta(p,q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Laplace'a

- Parametr $\lambda > 0$
- $f(x) = \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$ dla $x\in\mathbb{R}$