

1 Podstawy teorii miary probabilistycznej

1.1 Zbiory mierzalne – σ -ciało zbiorów

Załóżmy, że mamy jakiś zbiór Ω . Niech \mathcal{F} będzie taką rodziną podzbiorów Ω , że:

- $\Omega \in \mathcal{F}$
- $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A' \in \mathcal{F}$
- $\forall_{i \in I} A_i \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}$

Wtedy rodzinę \mathcal{F} nazywamy σ -**ciałem zbiorów**.

Gdy dana jest pewna rodzina \mathcal{A} podzbiorów zbioru Ω , σ -ciałem generowanym przez tą rodzinę, nazywamy najmniejsze (w sensie zawierania) σ -ciało zawierające \mathcal{A} i oznaczamy $\sigma(\mathcal{A})$. Można udowodnić, że $\sigma(\mathcal{A})$ jest przekrojem wszystkich σ -ciał zawierających \mathcal{A} . Gdy \mathcal{A} ma n elementów i są one parami rozłączne, oraz spełniają warunek $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ to $\sigma(\mathcal{A})$ ma 2^n elementów.

1.2 Zbiory borelowskie

Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wówczas σ -ciało generowane przez wszystkie zbiory otwarte zawarte w \mathbb{R} oznaczmy przez $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i nazywamy **rodziną zbiorów borelowskich**. Rodzina ta zawiera w szczególności wszystkie przedziały (a, b) .

Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją borelowską**, gdy przeciwobrazy zbiorów postaci $(-\infty, a)$ są borelowskie. W szczególności wszystkie funkcje ciągłe, są borelowskie (ale nie wszystkie funkcje borelowskie są ciągłe).

1.3 Miara probabilistyczna

Niech dany będzie pewien zbiór Ω i σ -ciało \mathcal{F} . Funkcję $P: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, spełniającą:

- $P(\emptyset) = 0$,
- $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$ dla parami rozłącznych zbiorów A_i .

nazywamy **miarą**. Jeśli dodatkowo spełniony jest warunek: $P(X) = 1$ to P nazywamy **miarą probabilistyczną** lub **prawdopodobieństwem**.

Trójkę (Ω, \mathcal{F}, P) nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

2 Rozkład prawdopodobieństwa

2.1 Rozkład dyskretny

Niech $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Mówimy, że rozkład prawdopodobieństwa P jest dyskretny, jeśli istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $A \in \mathcal{F}$ taki, że $P(A) = 1$.

2.2 Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa

Rozpatrzmy przestrzeń probabilistyczną $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$. Funkcję $F: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$, daną wzorem: $F(t) = P((-\infty, t])$ nazywamy **dystrybuantą** rozkładu P . Dystrybuanta posiada następujące własności:

- $\forall_{t \in \mathbb{R}} 0 \leq F(t) \leq 1$,
- F jest lewostronnie ciągła,
- F jest niemalejąca,
- $F(-\infty) = \lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0$,
- $F(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$.

Punkty nieciągłości (punkty skokowe) F są tzw. **nośnikami prawdopodobieństwa** – tzn. prawdopodobieństwo każdego takiego punktu jest niezerowe. Jeśli rozkład prawdopodobieństwa jest dyskretny, to dystrybuanta jest ponadto stała między punktami skokowymi.

2.3 Rozkład ciągły

Mówimy, że miara probabilistyczna P określona na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ jest typu ciągłego, gdy istnieje funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, taka, że $P(A) = \int_A f(x) dx$ dla dowolnego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Funkcję f nazywamy **gęstością miary** P .

Własności gęstości miary probabilistycznej

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$,

- $f(x) \geq 0$ prawie wszędzie (czyli zbiór punktów w których to nie jest prawda, ma miarę równą 0).

Każda funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ która spełnia te własności jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa. Niech f będzie gęstością, a F dystrybuantą. Wtedy zachodzi:

$$F(x) = P((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Dystrybuanta rozkładu typu ciągłego jest funkcją ciągłą. W punktach ciągłości f istnieje pochodna dystrybuanty i zachodzi: $f(x) = F'(x)$.

Uwaga. Nie każda ciągła dystrybuanta jest dystrybuantą rozkładu typu ciągłego. Istnieją rozkłady które nie są ani ciągłe ani dyskretne.

3 Zmienna losowa

Zmienną losową nazywamy dowolną funkcję $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $\forall x \in \mathbb{R} \{ \omega : X(\omega) < x \} \in \mathbb{F}$. W przypadku gdy $\mathcal{F} = 2^\Omega$, dowolna funkcja $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest zmienną losową.

3.1 Definicje podstawowe

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (Ω, \mathcal{F}, P) , oraz pewna zmienna losowa X . Wówczas funkcja $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ jest miarą probabilistyczną, oraz $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Miarę P_X nazywamy **prawdopodobieństwem generowanym przez zmienną losową X** .

Mając miarę P_X odpowiadającą pewnej zmiennej losowej X możemy więc zdefiniować pojęcie **dystrybuanty zmiennej losowej**. Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daną wzorem¹:

$$F_X(t) = P_X((-\infty, t)) = P(X^{-1}((-\infty, t))) = P(X < t).$$

3.2 Dyskretna zmienna losowa

Zmienną losową X nazywamy **zmienną typu dyskretnego**, gdy istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, taki, że $P_X(B) = 1$.

3.3 Ciągła zmienna losowa

Zmienną losową X **zmienną typu ciągłego**, gdy istnieje gęstość rozkładu prawdopodobieństwa P_X .

3.4 Funkcja zmiennej losowej

Jeśli X jest zmienną losową, a g funkcją borelowską, to złożenie $Y = g \circ X$ jest również zmienną losową. Ponadto zachodzi:

$$P_Y(B) = P_{g \circ X}(B) = P(\{\omega : g(X(\omega)) \in B\}) = P(\{\omega : X(\omega) \in g^{-1}(B)\}) = P_X(g^{-1}(B))$$

Ponadto jeśli X jest typu ciągłego to mamy:

$$F_Y(y) = \int_{\{x: g(x) < y\}} f_X(x)dx.$$

Jeśli dodatkowo, wiemy że g jest różniczkowalna i ściśle rosnąca ($g'(x) \neq 0$), to:

$$F_Y(y) = \int_{g^{-1}(-\infty)}^y (g^{-1}(t))' f_X(g^{-1}(t))dt$$

oraz

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))(g^{-1}(y))' = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{g'(g^{-1}(y))}.$$

3.5 Niezależne zmienne losowe

Zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są **niezależne** jeżeli dla dowolnych zbiorów borelowskich B_1, B_2, \dots, B_n zachodzi:

$$P(X_1 = B_1 \wedge X_2 = B_2 \wedge \dots \wedge X_n = B_n) = P(X_1 = B_1)P(X_2 = B_2) \dots P(X_n = B_n)$$

¹Wzór podany jest na kilka sposobów – stosuje się zamiennie kilka równoważnych form zapisu.

3.6 Charakterystyki zmiennych losowych

3.6.1 Wartość oczekiwana

Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę EX .

W przypadku, gdy X jest zmienną typu ciągłego wartość oczekiwana ma wartość:

$$EX = \sum_{i \in I} x_i p_i.$$

o ile szereg jest bezwzględnie zbieżny (jeśli nie jest to EX nie istnieje).

W przypadku, gdy X jest zmienną typu ciągłego o gęstości f , wartość oczekiwana wyraża się wzorem:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx$$

i istnieje, gdy całka jest zbieżna.

Własności wartości oczekiwanej

- $X \geq 0 \Rightarrow EX \geq 0$
- $|EX| \leq E|X|$
- dla $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $E(aX + bY) = aEX + bEY$
- dla $a \in \mathbb{R}$ zachodzi $Ea = a$
- $E(X - EX) = 0$
- $E(XY) = EX \cdot EY$, gdy X i Y są niezależne

Wartość oczekiwana z funkcji zmiennej losowej Jeśli φ jest funkcją borelowską, a zmienna losowa X jest typu dyskretnego, to:

$$E\varphi(X) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i) P(X = x_i)$$

a gdy X jest typu ciągłego, o gęstości f , to:

$$E\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) dx$$

3.6.2 Wariancja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę $Var(X)$ daną wzorem: $Var(X) = EX^2 - (EX)^2$.

W przypadku zmiennej losowej X typu **dyskretnego** zachodzi wzór: $Var(X) = \sum_{i \in I} (x_i - EX)^2 p_i$.

Własności wariancji

- $Var(X) \geq 0$
- $Var(cX) = c^2 Var(X)$ dla $c \in \mathbb{R}$
- $Var(X + c) = Var(X)$
- $Var(X) = 0 \iff \exists_c P(X = c) = 1$
- $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$ gdy X i Y są niezależne

Liczbę $\sqrt{Var X}$ nazywa się czasem **odchyleniem standardowym** i oznacza przez $\sigma(X)$.

3.6.3 Kowariancja i współczynnik korelacji

Niech X, Y będą zmiennymi losowymi. Liczbę $cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)]$ nazywamy kowariancją zmiennych X i Y . Kowariancję możemy wyliczyć również ze wzoru: $cov(X, Y) = EXY - EXEY$. Zauważmy, że gdy $X = Y$ to $cov(X, Y) = cov(X, X) = Var(X)$.

TW. $|cov(X, Y)| \leq \sqrt{Var(X)Var(Y)}$

Ponadto zachodzi: $cov(aX + b, cY + d) = ac \cdot cov(X, Y)$, $cov(a_1 X_1 + a_2 X_2, a_3 X_3 + a_4 X_4) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^4 a_i a_j cov(X_i, X_j)$.

Liczbę $\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$ nazywamy **współczynnikiem korelacji** zmiennych X i Y .

Gdy $\rho(X, Y) = 0$, to mówimy, że zmienne są **nieskorelowane**. Gdy $\rho(X, Y) = \pm 1$ to $P(X = aY + b) = 1$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$.

3.6.4 Inne charakterystyki liczbowe

Zmienna typu dyskretnego

Moment zwykły rzędu r $\alpha_r = EX^r = \sum_{i \in I} x_i^r p_i$

Moment centralny rzędu r $\mu_r = E(X - \alpha_1)^r = \sum_{i \in I} (x_i - \alpha_1)^r p_i$

Mediana każda liczba $x_{0,5}$ spełniająca warunki $F(x_{0,5}) \leq 0,5 \leq \lim_{x \rightarrow x_{0,5}} F(x)$; $\sum_{x_i < x_{0,5}} p_i \leq 0,5 \leq \sum_{x_i \leq x_{0,5}} p_i$

Kwantyl rzędu p każda liczba x_p , $0 < p < 1$ spełniająca warunki $F(x_p) \leq p \leq \lim_{x \rightarrow x_p} F(x)$; $\sum_{x_i < x_p} p_i \leq p \leq \sum_{x_i \leq x_p} p_i$

Dominanta m_0 – punkt skokowy x_k , różny od $\min(x_i)$ i $\max(x_i)$, dla którego $p(x_k)$ osiąga maksimum absolutne.

Zmienna typu ciągłego

Moment zwykły rzędu r $\alpha_r = EX^r = \int_{\mathbb{R}} x^r f(x) dx$

Moment centralny rzędu r $\mu_r = E(X - \alpha_1)^r = \int_{\mathbb{R}} (x - \alpha_1)^r f(x) dx$

Mediana $F(x_{0,5}) = 0,5$

Kwantyl rzędu p $F(x_p) = p$

Dominanta m_0 – odcięta maksimum absolutnego gęstości.

3.7 Funkcja charakterystyczna

Funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X nazywamy funkcję zespoloną $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ daną wzorem $\varphi(t) = Ee^{itX}$. W przypadku gdy X jest zmienną losową typu dyskretnego, funkcja charakterystyczna wyraża się wzorem:

$$\varphi(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}$$

W przypadku ciągłej zmiennej losowej X o gęstości f mamy natomiast:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x) dx$$

Własności funkcji charakterystycznej

1. $\varphi(0) = 1$.
2. $\forall t \in \mathbb{R} \varphi(t) = \overline{\varphi(-t)}$, gdzie $\overline{\varphi(-t)}$ oznacza liczbę zespoloną sprzężoną z $\varphi(-t)$.
3. $\forall t \in \mathbb{R} |\varphi(t)| \leq 1$.
4. φ jest funkcją jednostajnie ciągłą (co w szczególności oznacza, że jest ona ciągła).
5. φ jest funkcją rzeczywistą \Leftrightarrow rozkład zmiennej losowej X jest symetryczny względem $x = 0$.
6. Jeśli $\varphi_X(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X to, funkcją charakterystyczną zmiennej $Y = aX + b$ jest funkcja $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$.
7. Jeżeli istnieje k -ty moment zmiennej losowej X o funkcji charakterystycznej φ , to φ jest k -krotnie różniczkowalna i zachodzi związek $\alpha_k = EX^k = \frac{1}{i^k} \varphi^{(k)}(0)$
8. Funkcja charakterystyczna skończonej sumy niezależnych zmiennych losowych równa się iloczynowi funkcji charakterystycznych tych zmiennych.

TW. Niech F będzie dystrybuantą, zaś φ funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X . Wtedy:

1. Dla $a < b$ takich że, F jest ciągła (w tych punktach) zachodzi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) dt = F(b) - F(a)$$

2. Jeśli ponadto $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)| dt \leq +\infty$, to X ma rozkład typu ciągłego, o gęstości $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t) dt$.

Wniosek. Funkcja charakterystyczna jednoznacznie wyznacza rozkład zmiennej losowej.

TW. Jeśli φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X , okresową o okresie $T = 2\pi$, to X jest zmienną typu dyskretnego o wartościach całkowitych oraz $P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \varphi(t) dt$, $k \in \mathbb{Z}$.

4 Katalog zmiennych losowych

4.1 Dyskretne

Równomierny

- $p_i = \frac{1}{n}$
- $\mathbb{E}X = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Jednopunktowy

- $P(x_0) = 1$
- $\mathbb{E}X = x_0$
- $Var(X) = 0$
- $\varphi(t) = e^{ita}$

Zero-jedynkowy

- $P(1) = p, P(0) = 1 - p = q$
- $\mathbb{E}X = p$
- $Var(X) = pq$
- $\varphi(t) = pe^{it} + q$

Dwumianowy (Bernouliego)

- Oznaczenie: $B(n, p)$, n -liczba prób, p -prawdopodobieństwo sukcesu,
- $P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

4.2 Ciągłe

Jednostajny (równomierny)

- $J((a, b))$, gdzie (a, b) – przedział
- $F(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < a \\ 1 & \text{dla } x > b \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$
- $\mathbb{E}X = \frac{b-a}{2}$
- $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$
- Dla $J((0, a))$: $\varphi(t) = \frac{e^{iat} - 1}{iat}$
- Dla $J((-a, a))$: $\varphi(t) = \frac{\sin at}{at}$

Wykładniczy

- Parametr $\lambda > 0$
- $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$
- $\varphi(t) = \frac{\lambda}{1+it^2}$

- $\mathbb{E}X = np$
- $Var(X) = npq$
- $\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n$

Poissona

- Oznaczenie: $\mathcal{P}(\lambda)$
- Parametr: $\lambda > 0$
- $P(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ dla $k \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{E}X = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$
- $\varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

Geometryczny

- Oznaczenie: $Geom(p)$.
- $P(1) = p, P(0) = 1 - p$
- $\mathbb{E}X = p$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$
- $\varphi(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$

Gamma

- Oznaczenie: $\Gamma(p, \alpha)$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\alpha x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$
gdzie $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, n = 1, 2, 3, \dots, \Gamma(n) = (n-1)!$
- $\varphi(t) = (1 - \frac{it}{\alpha})^{-p}$
- Uwaga: $\Gamma(1, \alpha)$ to rozkład wykładniczy.
- Uwaga: $\Gamma(\frac{n}{2}, \frac{1}{2})$ to tak zwany rozkład χ^2 (chi kwadrat) z n stopniami swobody.

Beta

- Parametry: $p, q > 0$
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} & x \in (0, 1) \\ 0 & w \text{ p.p.} \end{cases}$
 $\beta(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Laplace'a

- Parametr $\lambda > 0$
- $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$ dla $x \in \mathbb{R}$

Normalny (Gaussowski)

- Oznaczenie $N(p, \sigma^2)$, $N(0, 1)$ nazywamy standardowym.
- $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x)$
- $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ dla $x \in \mathbb{R}$
- $\mathbb{E}X = m$
- $Var(X) = \sigma^2$
- Dla standardowego: $\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Cauchy'ego

- Parametry θ, λ
- $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)$
- $f(x) = \frac{1}{\pi\lambda\left[1+\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^2\right]}$
- $\varphi(t) = e^{-|t|}$
- Wartość oczekiwana i wariancja są niezdefiniowane – nie istnieją gdyż całki rozbiegają do nieskończoności.
- Uwaga. Jeśli X i Y mają standardowy rozkład normalny to zmienna X/Y ma rozkład Cauchy'ego z parametrami $\theta = 0$ i $\lambda = 1$

5 Zmienne losowe wielowymiarowe

Wektorem losowym lub zmienną losową wielowymiarową nazywamy dowolną funkcję $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, która spełnia warunek: $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, czyli przeciwobraz dowolnego zbioru borelowskiego z przestrzeni² \mathbb{R}^n musi należeć do σ -ciała.

Każdą funkcję wielowymiarową $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ możemy przestawić w postaci: $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, gdzie dla każdego $1 \leq i \leq n$ $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Funkcja X jest zmienną losową wielowymiarową \iff każde X_i jest („zwykłą”) zmienną losową.

Odwzorowanie $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nazywamy funkcją borelowską gdy przeciwobrazy zbiorów borelowskich z \mathbb{R}^m są zbiorami borelowskim w \mathbb{R}^n .

Złożenie $\varphi \circ X$, gdzie X wektor losowy a φ funkcja borelowska, jest też wektorem losowym.

Wektor losowy jest wektorem **typu dyskretnego**, gdy istnieje taki co najwyżej przeliczalny zbiór B borelowski, że $P_X(B) = 1$.

Wektor losowy jest wektorem **typu ciągłego**, gdy istnieje funkcja f taka, że $P_X(B) = \int \dots \int_B f(x) dx$, dla dowolnego B borelowskiego. Funkcję tą nazywamy gęstością (musi ona spełniać dodatkowe warunki, o czym niżej).

5.1 Dystrybuanta

Gdy $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest wektorem losowym, dystrybuanta ma postać: $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(t_1, t_2, \dots, t_n) = P_X((-\infty, t_1) \times (-\infty, t_2) \times \dots \times (-\infty, t_n))$. W przypadku gdy $n = 2$ mamy: $F(x, y) = P(X < x, Y < y)$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Własności

- Jest lewostronnie ciągła i niemalejąca ze względu na każdą zmienną z osoba.
- $\forall x \in \mathbb{R} \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R} \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$
- Dla dowolnych punktów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ takich, że $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$ zachodzi nierówność $F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1) \geq 0$

5.2 Gęstość

Własności

- $P_X(B) = \int \dots \int_B f(x) dx$
- $F(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$
- $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$
- w punktach ciągłości: $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$.

Niezależność zmiennych: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ lub $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$

²Zbiory borelowskie w \mathbb{R}^n , to σ -ciało zbiorów zawierające wszystkie zbiory otwarte z tej przestrzeni. Generowane jest np. przez wszystkie otwarte kostki (iloczynny kartezyjskie przedziałów otwartych).

5.3 Rozkład brzegowy

Niech $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ wektor losowy o dystrybucie F . Wówczas funkcje $F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y)$ oraz $F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y)$ są dystrybuantami rozkładów na \mathbb{R} . Rozkłady te nazywamy brzegowymi.

Jeśli dodatkowo wektor losowy posiada gęstość f , to funkcje $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ oraz $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ są gęstościami rozkładów brzegowych na \mathbb{R} .

5.4 Parametry liczbowe

Wartość oczekiwana Jeśli $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ jest wektorem losowym, to wektor liczb $(EX_1, EX_2, \dots, EX_n)$ nazywamy wartością średnią (oczekiwaną) wektora X . Jest ona określona jeśli wszystkie wartości oczekiwane EX_i istnieją.

Jeśli $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja borelowska, oraz X wektor losowy typu ciągłego, to $E\varphi(X) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx$.

5.5 Przykłady

Gęstości sumy, iloczynu, ilorazu zmiennych losowych:

1. $U = X + Y: k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x, u-x) dx$; gdy X, Y -niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(u-x) dx$
2. $U = XY: k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(x, \frac{u}{x}) \frac{1}{|x|} dx$; gdy X, Y -niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f_2(\frac{u}{x}) \frac{1}{|x|} dx$
3. $U = \frac{X}{Y}: k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f(uy, y) |y| dy$; gdy X, Y -niezależne: $k_1(u) = \int_{\mathbb{R}} f_1(uy) f_2(y) |y| dy$

Dwuwymiarowy rozkład normalny ma gęstość daną wzorem:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]\right\} \text{ dla } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

gdzie: $\mu_1 = EX, \mu_2 = EY, \sigma_1 = \sqrt{D^2X} > 0, \sigma_2 = \sqrt{D^2Y} > 0, \rho$ -współczynnik korelacji zm.los. X i Y , przy czym $|\rho| < 1$.

6 Zbieżność ciągów zmiennych losowych

1. Zbieżność z prawdopodobieństwem 1 (prawie na pewno, prawie wszędzie): $P(\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.
Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(p.n.)]{z.p.r. 1} X$.
2. Zbieżność według prawdopodobieństwa: $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \epsilon\}) = 0$. Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(P)]{wg pr.} X$.
3. Zbieżność według dystrybuant (zbieżność względem rozkładu, słabo zbieżny) – ciąg dystrybuant F_n jest zbieżny do dystrybuanty F w każdym punkcie ciągłości F . Oznaczenie: $X_n \xrightarrow[(s)]{D} X$.

Rodzaje zbieżności wymienione są od najsilniejszej do najsłabszej. Ze zbieżności z prawdopodobieństwem 1 wynika zbieżność według prawdopodobieństwa, a z niej wynika zbieżność według dystrybuant.

Następujące warunki są równoważne ze zbieżnością z prawdopodobieństwem 1:

- $\forall \epsilon > 0 \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{|X_n - X| < \epsilon\} = 1$
- $\forall \epsilon > 0 \lim_{k \rightarrow \infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} \{|X_n - X| \geq \epsilon\} = 0$

6.1 Twierdzenie o ciągłości

Ciąg $(X_n)_n$ jest zbieżny według rozkładu do X wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg funkcji charakterystycznych φ_n jest zbieżny w każdym punkcie do funkcji ciągłej φ . Takie φ jest funkcją charakterystyczną zmiennej X .

7 Prawa wielkich liczb i twierdzenia graniczne

Słabe prawo wielkich liczb. Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, $m_k = EX_k$, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Jeżeli ciąg $\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - m_k)}{n}$ zbiega według prawdopodobieństwa do 0 to mówimy, że X_n spełnia słabe prawo wielkich liczb (SPWL). Warunek z definicji można równoważnie zapisać: $\forall \epsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\frac{S_n - ES_n}{n}| \geq \epsilon) = 0$.

Tw. Czebyszewa Ciąg niezależnych zmiennych losowych X_n spełnia SPWL, gdy istnieją wartości oczekiwane $E(X_i)$ i wariancje σ_i^2 zmiennych X_i istnieją i są wspólnie ograniczone (tzn. $\exists \sigma^2 \forall_n Var(S_n) \leq \sigma^2$).

Tw. Markowa Ciąg zmiennych losowych X_n spełnia SPWL, gdy istnieją wartości oczekiwane $E(X_i)$ i wariancje σ_i^2 zmiennych X_i oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Var(S_n)}{n^2} = 0$.

Wniosek Jeśli X_n ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, dla którego istnieje wariancja, to ciąg ten spełnia SPWL.

Tw. Chinczyna Ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i wspólnej wartości oczekiwanej spełnia SPWL.

Mocne prawo wielkich liczb. X_n jest ciągiem zmiennych losowych, $m_k = EX_k$. Ciąg X_n spełnia mocne prawo wielkich liczb (MPWL), gdy ciąg $\frac{\sum_{k=1}^n (X_k - m_k)}{n}$ zbiega do 0 z prawdopodobieństwem jeden.

Uwaga. Jeśli ciąg spełnia MPWL to spełnia też SPWL.

Tw. Kołomogorowa Jeśli X_n są niezależne, $Var(X_n)$ istnieją oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var(X_n)}{n^2}$ jest zbieżny, to $(X_n)_n$ spełnia MPWL.

Wniosek Jeśli $(X_n)_n$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie i $\forall_n Var(X_n) = \sigma^2 < +\infty$, to X_n spełnia MPWL.

Wniosek Jeśli X_n spełnia założenia tw. Czebyszewa to spełnia MPWL.

Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Levy'ego. Jeżeli $\{X_n\}$ jest losowym ciągiem niezależnych zmiennych o jednakowym rozkładzie, o wartości przeciętnej α_1 i skończonej wariancji $\sigma^2 > 0$, to ciąg (F_n) dystrybuant standaryzowanych średnich arytmetycznych \bar{X}_n (standaryzowanych sum $\sum_{i=1}^n X_i$) $Y_n = \frac{\bar{X}_n - \alpha_1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\alpha_1}{\sigma\sqrt{n}}$ jest zbieżny do dystrybuanty Φ rozkładu $N(0, 1)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \equiv \Phi(y)$