Witold Bołt
na podstawie wykładu
dr. hab. Andrzeja Szczepańskiego, prof. UG

Geometria różniczkowa

15 czerwca 2007

Uwaga! Jeśli zauważysz jakieś błędy to pisz: Witold Bołt ⟨ja@hope.art.pl⟩. Aktualną wersję tego dokumentu można zawsze znaleźć w Internecie na stronie domowej autora: http://www.hope.art.pl/skrypty/geom/.

Dziękuję wszystkim, którzy swoją cierpliwością i jakąkolwiek pomocą przyczynili się do powstania tego tekstu.

Witold Bołt

Spis treści

Rozdział 1

Teoria krzywych

Oznaczenia. Literą I będziemy oznaczać przedziały (zazwyczaj domknięte) $[a, b]$ w $\mathbb{R}$. Niech dana będzie funkcja różniczkowalna $f\colon I \to \mathbb{R}^n$, oraz niech $t_0 \in I$. Pochodną f w punkcie t_0 oznaczamy $f'(t_0)$ i rozumiemy jako wektor: $\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$.

1.1 Podstawowe definicje

Definicja 1.1.1 (krzywa i parametryzacja krzywej)**.** Krzywą γ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nazywamy dowolny ciągły obraz odcinka $I = [a, b]$.

Funkcję ciągłą $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazywamy parametryzacją krzywej γ, o ile $\gamma = c(I)$.

W dalszej części tego opracowania będziemy utożsamiać (tam gdzie to możliwe) krzywą i jej opis parametryczny (na obie te rzeczy będziemy mówić krzywa). Krzywe oznaczać będziemy literami c lub γ.

Będziemy zakładać (jeśli nie napisano inaczej), że rozważane przez nas krzywe są klasy C^m dla pewnego $m > 0$.

Definicja 1.1.2 (krzywa regularna)**.** Mówimy, że krzywa γ jest regularna (ma opis regularny), gdy:

$$\forall_{t\in I}\gamma'(t) \neq 0.$$

Przykład 1.1.3. Niech dane będą krzywe, zadane przez parametryzacje: $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$; $\gamma_2(t) = (\cos -2t, \sin -2t)$, $t \in [0, \pi]$. Obie parametryzacje opisują tą samą krzywą. Z drugiej strony, zauważmy, że $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = (1, 0)$, oraz $\gamma_1'(0) = (0, 1)$, $\gamma_2'(0) = (0, -2)$. Pochodne wyznaczają tutaj wektory styczne. W obu przypadkach są one równoległe, jednak różnią się, zależnie od parametryzacji.

Definicja 1.1.4 (długość krzywej)**.** Niech $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ będzie krzywą. Długość krzywej γ oznaczamy przez $L(\gamma)$ i definiujemy:

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|dt$$

Definicja 1.1.5 (parametryzacja łukowa)**.** Parametryzacja krzywej $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest łukowa o ile:

$$\forall_{t_1<t_2\in I}\ L(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = t_2 - t_1$$

1.2 Podstawowe własności, wzory Freneta

Stwierdzenie 1.2.1. *1. Regularny opis parametryczny jest opisem łukowym, wtedy i tylko wtedy gdy $\forall_{t\in I}\ |\gamma'(t)| = 1$.*

2. Każda krzywa regularna klasy C^1 ma łukowy opis parametryczny.

Dowód. 1. Załóżmy, że krzywa ma parametryczny opis łukowy. Wówczas:

$$|\gamma'(t)| = \frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}|\gamma'(s)|ds = \frac{d}{dt}|t-t_0| = 1$$

czyli rzeczywiście dla dowolnego $t \in I$ zachodzi $|\gamma'(t)| = 1$.

Załóżmy, teraz że zachodzi $\forall_{t\in I}|\gamma'(t)| = 1$ i sprawdzimy, czy krzywa γ ma opis łukowy. Ustalmy $t_0 \in I$. Dla $t \geqslant t_0$ mamy:

$$L(\gamma|_{[t_0,t]}) = \int_{t_0}^{t}|\gamma'(s)|ds = \int_{t_0}^{t}1ds = t - t_0$$

czyli krzywa ma parametryzacje łukową.

2. Niech $c(t)$ krzywa regularna, oraz $t_0 \in I$. Zdefiniujmy funkcję $s\colon I \to \mathbb{R}$ wzorem:

$$s(t) = \operatorname{sgn}(t-t_0)\int_{t_0}^{t}|c'(\tau)|d\tau.$$

Funkcja s jest różniczkowalna, ponadto zachodzi: $\frac{ds}{dt} = \left|\frac{dc}{dt}\right|$. Pochodna c nie zeruje się, więc pochodna s jest zawsze dodatnia, stąd s monotoniczna (rosnąca). Istnieje więc funkcja odwrotna $t(s) = s^{-1}(t)$. Niech $\gamma(s) = c(t(s))$. Sprawdzimy, że taka $\gamma(s)$ ma opis łukowy.

$$\left|\frac{d\gamma}{ds}\right| = \left|\frac{dc}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|\cdot\left|\frac{dt}{ds}\right| = 1.$$

□

Przykład 1.2.2. 1. Krzywa (odcinek) $c(t) = (\alpha t + x_0, \beta t + y_0)$ jest łukowo sparametryzowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

2. Łukowy opis parametryczny okręgu o środku $(0,0)$ i promieniu R ma postać:

$$c(s) = \left(R\cos\frac{s}{r}, R\sin\frac{s}{R}\right) \quad s \in [0, 2\pi R]$$

Stwierdzenie 1.2.3. *Jeżeli $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest krzywą różniczkowalną oraz $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest odwzorowaniem różniczkowalnym, to:*

$$\forall_{t_0 \in I} (f \circ c)'(t_0) = df_{c(t_0)}(c'(t_0)).$$

Dowód. Niech $f = (f_1, \ldots, f_m)$, gdzie $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Podobnie niech $c = (x_1, \ldots, x_n)$. Zachodzi wówczas: $(f \circ c)' = ((f_1 \circ c)', \ldots, (f_m \circ c)')$. Ustalmy $1 \leqslant k \leqslant m$. Mamy:

$$\left(\frac{d}{dt}(f_k \circ c)\right)(t_0) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(c(t_0)) \frac{dx_i}{dt}(t_0),$$

z czego wynika, że:

$$(f \circ c)'(t_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c(t_0))\right]_{i,j} \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{bmatrix} = df_{c(t_0)}(c'(t_0)).$$

□

Definicja 1.2.4 (orientacja dodatnia i ujemna)**.** Układ $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ ma orientację ujemną (dodatnią), gdy $\det(v_1, \ldots, v_n) < 0$ ($\det(v_1, \ldots, v_n) > 0$).

Wniosek 1.2.5. W przypadku gdy $n = 1$ wybór orientacji, to wybór kierunku poruszania się po prostej.

Zakładamy, że dane są krzywa $c\colon I \to \mathbb{R}^2$, $c(s_0) = p$. Oznaczmy kąt między wektorami stycznymi do krzywej c w punktach s_0 i $s_0 + \Delta s$ przez: $\Delta_p \varphi = \sphericalangle(\dot{c}(s_0), \dot{c}(s_0 + \Delta s))$, gdzie $\dot{c}$ oznacza pierwszą pochodną c względem s.

Definicja 1.2.6 (krzywizna krzywej)**.** Jeśli c jest zorientowaną krzywą płaską klasy C^2, to wielkość:

$$K_c(p) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta_p \varphi}{\Delta s},$$

nazywamy krzywizną krzywej c w punkcie p.

Definicja 1.2.7 (reper Freneta)**.** Niech c będzie sparametryzowaną łukowo płaską krzywą zorientowaną dodatnio, a $e_1(t), e_2(t)$ dodatnio zorientowaną bazą ortonormalną w $\mathbb{R}^2$, taką, że $e_1(t) = c'(t)$. Wtedy układ $e_1(t), e_2(t)$ nazywamy reperem Freneta krzywej c w punkcie $c(t)$.

Przykład 1.2.8. Niech $c\colon I \to \mathbb{R}^2$ krzywa sparametryzowana łukowo, dana wzorem $c(t) = (x(t), y(t))$. Przyjmijmy $e_1(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$, oraz $e_2(t) = (-\dot{y}(t), \dot{x}(t))$. Układ e_1, e_2 jest reperem Freneta krzywej c, ponieważ $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ oraz $\det[e_1, e_2] = 1$.

Twierdzenie 1.2.9. *Niech c krzywa płaska klasy C^2 sparametryzowana łukowo. Wówczas:*

1. *Krzywizna jest określona w każdym punkcie.*

2. *Jeśli e_1, e_2 reper Freneta, to zachodzi:*

$$\begin{aligned} K_c(c(t))e_2(t) &= \ddot{c}(t) \\ K_c(c(t)) &= \langle \ddot{c}(t), e_2(t)\rangle \\ |K_c(c(t))| &= |\dot{c}(t)| \end{aligned}$$

3. *Reper Freneta e_1, e_2 spełnia:*

$$\begin{cases} \ddot{c} = e_1' = K_c e_2 \\ e_2' = -K_c e_1 \end{cases}$$

co można zapisać w postaci macierzowej jako:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_c \\ -K_c & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Dowód. Wektory $e_1(s), e_2(s)$ stanowią bazę ortonormalną $\mathbb{R}^2$. Zapiszmy więc wektor $e_1(s+\Delta s)$ w tej bazie:

$$e_1(s+\Delta s) = \langle e_1(s+\Delta s), e_1(s)\rangle e_1(s) + \langle e_1(s+\Delta s), e_2(s)\rangle e_2(s).$$

Niech $\Delta\varphi$ oznacza kąt $\sphericalangle(e_1(s), e_1(s+\Delta s))$. Wektory $e_1(s), e_2(s)$ są ortonormalne (dla każdego s), czyli w szczególności mają długość 1. Stąd iloczyn skalarny wektorów $e_1(s)$ i $e_1(s+\Delta s)$ równy jest kosinusowi kąta między nimi:

$$\langle e_1(s+\Delta s), e_1(s)\rangle = \cos\Delta\varphi.$$

Podobnie:

$$\langle e_1(s+\Delta s), e_2(s)\rangle = \cos\sphericalangle(e_1(s+\Delta s), e_2(s)).$$

Zauważmy również, że:

$$\sphericalangle(e_1(s+\Delta s), e_2(s)) = \sphericalangle(e_1(s), e_2(s)) + \sphericalangle(e_1(s+\Delta s), e_1(s)) = \pi - \Delta\varphi$$

Mamy więc, że:

$$\langle e_1(s+\Delta s), e_2(s)\rangle = \sin\Delta\varphi.$$

Czyli ostateczne:

$$e_1(s+\Delta s) = \cos\Delta\varphi e_1(s) + \sin\Delta\varphi e_2(s).$$

Sprawdzamy warunki z punktu 2 w treści twierdzenia. Policzmy drugą pochodną krzywej c. Z definicji $e_1(s)$ wiemy, że $\ddot{c} = e_1'$. Policzymy więc pierwszą pochodną e_1:

$$\frac{de_1}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{e_1(s+\Delta s) - e_1(s)}{\Delta s} =$$

Stosujemy teraz wyliczoną wcześniej postać $e_1(s+\Delta s)$:

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\cos\Delta\varphi e_1(s) + \sin\Delta\varphi e_2(s) - e_1(s)}{\Delta s} \\
&= \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\cos\Delta\varphi - 1}{\Delta s} e_1(s) + \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta s} e_2(s) \\
&= \left(\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\cos\Delta\varphi - 1}{\Delta\varphi} \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) e_1(s) + \left(\lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\sin\Delta\varphi}{\Delta\varphi} \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right) e_2(s) \\
&= 0 \cdot e_1(s) + K_c(c(s))e_2(s)
\end{aligned}
$$

Mamy więc:

$$\langle c'', e_1\rangle = \langle K_c e_2, e_2\rangle = K_c,$$

co daje:

$$|c''|^2 = \langle c'', c''\rangle = K_c^2\langle e_2, e_2\rangle = K_c^2$$

W ten sposób udowodniliśmy punkt 2. Przechodzimy do dowodu punktu 3. Wektory e_1, e_2 stanowią bazę, więc wektor $\dot{e}_i$ możemy zapisać w tej bazie:

$$\dot{e}_i(t) = w_{i1}(t)e_1(t) + w_{i2}(t)e_2(t)$$

gdzie $w_{ij}(t) \in \mathbb{R}$. Korzystamy teraz z faktu, że $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. Licząc obustronnie pochodną w tej równości otrzymujemy:

$$0 = \frac{d}{dt}\langle e_i, e_j\rangle = \langle \dot{e}_i, e_j\rangle + \langle e_i, \dot{e}_j\rangle$$

Podstawimy teraz do powyższego wzoru, $\dot{e}_1$ przedstawione w bazie e_1, e_2:

$$0 = \langle w_{11}e_1 + w_{12}e_2, e_2\rangle + \langle e_1, w_{21}e_1, w_{22}e_2\rangle = w_{12} + w_{21}$$

Podobnie wyliczamy $\frac{d}{dt}\langle e_1, e_1\rangle$:

$$0 = \langle \dot{e}_1, e_1\rangle + \langle e_1, \dot{e}_1\rangle = w_{11} + w_{11} = 0$$

Z powyższych rozważań wynika, że:

$$\begin{cases} w_{21} = -w_{12} \\ w_{11} = w_{22} = 0 \end{cases}$$

Co daje nam:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = w_{12}e_2 \\ \dot{e}_2 = -w_{12}e_1 \end{cases}$$

Z wcześniej udowodnionych własności wynika, że $\dot{e}_1 = \ddot{c} = K_c e_2 = w_{12}e_2$, czyli $w_{12} = K_c$. $\square$

1.3 Wzory Freneta w $\mathbb{R}^n$

Definicja 1.3.1 (krzywa niezdegenerowana)**.** Krzywa regularna jest niezdegenerowana jeśli $\forall_{t\in I}$ wektory $c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n)}(t) \in \mathbb{R}^n$ są liniowo niezależne.

Definicja 1.3.2 (reper Freneta)**.** Reperem Freneta regularnej, niezdegenerowanej krzywej $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazywamy układ funkcji $e_1, \ldots, e_n\colon I \to \mathbb{R}^n$, taki, że funkcje $e_1, \ldots, e_{n-1}$ powstają z układu $c', \ldots, c^{(n-1)}$ przez jego ortonormalizację, a funkcję e_n wybieramy tak, aby cały układ był ortonormalny i zorientowany dodatnio.

Uwaga 1.3.3. Można pokazać, że:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K_1 & 0 & \ldots & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -K_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

gdzie K_i jest i-tą krzywizną krzywej c.

1.4 Krzywe w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

Dana jest krzywa w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ z parametryzacją łukową $c\colon I \to \mathbb{R}^3$. Układ wektorów stanowiący reper Freneta tej krzywej obliczamy zgodnie z definicją podaną w poprzednim punkcie. Zauważmy, że skoro układ ten musi być zorientowany dodatnio, to mając dwa pierwsze wektory, możemy wyznaczyć trzeci z wzoru: $e_3 = e_1 \times e_2$.

Wzory Freneta w przypadku trój-wymiarowym mają postać:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$

Liczby k oraz τ nazywamy odpowiednio krzywizną i skręceniem krzywej.

Definicja 1.4.1 (trójścian Freneta)**.** Niech c krzywa w $\mathbb{R}^3$, $p \in \mathbb{R}^3$, oraz e_1, e_2, e_3 reper Freneta krzywej c w punkcie p. Definiujemy następujące płaszczyzny:

- ściśle styczna – rozpięta na wektorach e_1, e_2,
- normalna – rozpięta na wektorach e_1, e_3,
- prostująca – rozpięta na wektorach e_2, e_3.

Sumę tych trzech płaszczyzn nazywamy trójścianem Freneta.

Definicja 1.4.2. krzywa płaska Jeśli krzywa $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ leży w pewnej płaszczyźnie, to mówimy, że jest to krzywa płaska.

Fakt 1.4.3. *Niech* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *sparametryzowana łukowo, niezdegenerowana krzywa. Jeśli wektor* e_3 *w układzie Freneta jest stały, to* c *jest krzywą płaską.*

Dowód. Zakładamy, że e_3 stały. Korzystamy z wzoru na różniczkowanie iloczynu skalarnego:

$$\langle c, e_3\rangle' = \langle c', e_3\rangle + \langle c, e_3'\rangle$$

Zauważmy, że z wzorów Freneta mamy w szczególności, że:

$$\langle c', e_3\rangle = 0$$

natomiast z założeń wiemy, że e_3 jest stały, więc $e_3' = 0$. Wiemy więc, że:

$$\langle c, e_3\rangle' = 0 \Rightarrow \langle c, e_3\rangle = D \in \mathbb{R}\text{– stała.}$$

Załóżmy, że daną mamy jakąś parametryzację c postaci:

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

oraz, że wektor e_3 jest postaci:

$$e_3(t) = (A, B, C).$$

Wiemy więc, że:

$$\langle c, e_3\rangle = \langle (x(t), y(t), z(t)), (A, B, C)\rangle = D$$

a to dokładnie oznacza, że:

$$Ax(t) + By(t) + Cz(t) = D$$

co dowodzi, że każdy punkt krzywej c leży na płaszczyźnie danej równaniem:

$$Ax + By + Cz = D$$

□

Stwierdzenie 1.4.4. *Niech* $c\colon I \to \mathbb{R}^3$ *będzie łukowo sparametryzowaną krzywą niezdegenerowaną. Następujące warunki są równoważne:*

(i) *c jest krzywą płaską,*

(ii) $\tau = 0$,

(iii) *c leży w płaszczyźnie równoległej do swej płaszczyzny stycznej,*

(iv) *wszystkie płaszczyzny styczne do c pokrywają się.*

Dowód. Części $(iii) \iff (iv)$ oraz $(iii) \Rightarrow (i)$ są oczywiste.

Udowodnimy teraz $(i) \Rightarrow (ii)$. Z wzorów Freneta mamy, że:

$$e_3' = -\tau e_2.$$

Zakładamy, że c jest krzywą płaską. Wiemy więc, że e_3 stały, czyli $e_3' = 0$. Ponieważ e_2 nie jest wektorem zerowym to natychmiast dostajemy, że $\tau = 0$.

Wynikanie $(ii) \Rightarrow (i)$ otrzymujemy wprost z udowodnionego wcześniej faktu i z równości $e_3' = -\tau e_2$.

Pozostało do pokazania, że z punktu (i) wynika (iii). Załóżmy, że $t_0 \in I$. Jeśli c jest krzywą płaską, to płaszczyzna P zawierająca c i płaszczyzna Π równoległa do płaszczyzny ściśle stycznej w punkcie $c(t_0)$ i zawierająca ten punkt są równoległe (wektor $e_3(t_0)$ jest prostopadły do obu tych płaszczyzn). Ponieważ $c(t_0) \in P \cap \Pi$, oraz P i Π równoległe, to $P = \Pi$. □

Uwaga 1.4.5. Do obliczenia krzywizny i skręcenia krzywej w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ można korzystać z wzorów:

$$k = \frac{|c' \times c''|}{|c'|^3} \qquad \tau = \frac{\langle c' \times c'', c''' \rangle}{|c' \times c''|^2} = \frac{det[c', c'', c''']}{|c' \times c''|^2}$$

Rozdział 2

Teoria powierzchni

2.1 Rozmaitości różniczkowe

Definicja 2.1.1 (mapa)**.** Niech X będzie przestrzenią topologinczą. Mapą na X nazywamy dowolny homeomorfizm $\Phi_\alpha \colon U_\alpha \to W_\alpha$, gdzie U_α jest otwartym podzbiorem X, a W_α jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

Definicja 2.1.2 (atlas)**.** Atlasem nazywamy zbiór map pewnej przestrzeni topologicznej X:

$$\{\Phi_\alpha \colon U_\alpha \to W_\alpha\}_{\alpha\in I}$$

taki, że $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = X$.

Mówimy, że atlas jest gładki (klasy C^r) jeśli funkcje $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} \colon \Phi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta) \to \Phi_\beta(U_\alpha \cap V_\beta)$ są gładkie (klasy C^r).

Definicja 2.1.3. Niech $\{U_\alpha, \Phi_\alpha\}$, $\{V_\beta, \eta_\beta\}$ będą atlasami odpowiednio na przestrzeni topologicznej na X i Y. Odwzorowanie $f \colon X \to Y$ jest gładkie (klasy C^r) jeśli funkcje: $\eta_\beta \circ f \circ \Phi_\alpha^{-1}|_{\Phi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta))}$ są gładkie (klasy C^r).

Definicja 2.1.4 (atlasy równoważne)**.** Dwa atlasy na przestrzeni topologicznej X: $\{\Phi_\alpha\}, \{\Psi_\beta\}$ są równoważne jeśli identyczność na X jest funkcją gładką.

Definicja 2.1.5 (rozmaitość)**.** Gładką (klasy C^r) n-wymiarową rozmaitością nazywamy przestrzeń topologiczną z zadaną na niej klasą atlasów równoważnych. Klasy równoważności atlasów nazywamy strukturą różniczkową na rozmaitości X.

Uwaga 2.1.6. Z reguły rozmaitość definiuje się jako przestrzeń, która jest lokalnie homeomorficzna (lub dyfeomorficzna) z przestrzenią euklidesową. Ogólny sens wszystkich tych definicji jest taki sam i sprowadza się do tego, że w analizie rozmaitości możemy lokalnie patrzeć na nią jak na fragment „zwykłej” przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Przykład 2.1.7. Typowe rozmaitości, to: $\mathbb{R}^n, S^n, \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}^n, D^n$, torus.

2.2 Podstawowe pojęcia, metryka Riemanna

Definicja 2.2.1 (powierzchnia)**.** Powierzchnia jest to dowolna, zwarta i spójna rozmaitość 2-wymiarowa.

W dalszej części tego opracowania, jeśli nie zaznaczono inaczej, rozpatrujemy powierzchnie zanurzone w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Definicja 2.2.2 (wektor styczny i przestrzeń styczna)**.** Wektorem stycznym do powierzchni M w punkcie p nazywamy każdy wektor styczny w tym punkcie do pewnej krzywej różniczkowalnej $c\colon I \to M$. Zbiór wektorów stycznych do M w punkcie p nazywamy przestrzenią styczną i oznaczamy przez T_pM.

Przykład 2.2.3.

1. Niech $p \in \mathbb{R}^2$. Wówczas $T_p\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$.
2. Niech M pewna powierzchnia, oraz niech $U \subset M$ otwarty, oraz $p \in U$. Wówczas zachodzi: $T_pU = T_pM$.
3. Załóżmy, że powierzchnia jest sparametryzowana w następujący sposób:

   $$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

   gdzie $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$, zbiór U jest otwarty, a funkcje x, y, z są różniczkowalne. Wprowadźmy oznaczenia:

   $$\begin{array}{lll} x_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & y_u = \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & z_u = \frac{\partial z}{\partial u}(u,v) \\ x_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) & y_v = \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) & z_v = \frac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{array}$$

   Wówczas wektory $dr(e_1) = [x_u, y_u, z_u]$, $dr(e_2) = [x_v, y_v, z_v]$ stanowią bazę przestrzeni stycznej.

Definicja 2.2.4 (pierwsza forma kwadratowa)**.** Pierwszą formą kwadratową powierzchni M w punkcie p nazywamy iloczyn skalarny:

$$\langle , \rangle \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

Definicja 2.2.5 (metryka Riemanna)**.** Metryką Riemanna na powierzchni M nazywamy różniczkowe przyporządkowanie każdemu punktowi $p \in M$ iloczynu skalarnego na przestrzeni T_pM.

Standardową bazą przestrzeni stycznej T_pM jest $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Rozważmy macierz $[g_{ij}]_{i,j=1,2}$, zdefiniowaną jako: $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ (gdzie iloczyn skalarny $\langle , \rangle$ to standardowy iloczyn skalarny z $\mathbb{R}^n$). Z symetrii iloczynu skalarnego mamy $g_{ij} = g_{ji}$. Macierz ta wyznacza jednoznacznie metrykę Riemanna. Załóżmy bowiem, że mamy dwie krzywe c, d w M. Ustalmy dowolny punkt $p \in M$. Wtedy oczywiście:

$$c'(p) = c_1(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + c_2(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2}$$

$$d'(p) = d_1(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + d_2(p)\frac{\partial(p)}{\partial x_2}$$

Aby policzyć iloczyn skalarny (wyznaczony przez metrykę Riemanna) wystarczy policzyć:

$$\langle c'(p), d'(p)\rangle = \left\langle c_1\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + c_2\frac{\partial(p)}{\partial x_2}, d_1\frac{\partial(p)}{\partial x_1} + d_2\frac{\partial(p)}{\partial x_2}\right\rangle =$$
$$= g_{11}c_1d_1 + g_{12}c_1d_2 + g_{21}c_2d_1 + g_{22}c_2d_2 = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}c_id_j$$

Wobec tego iloczyn skalarny wyznaczony przez metrykę Riemanna odpowiada formie dwuliniowej o macierzy $[g_{ij}]_{i,j=1,2}$.

Definicja 2.2.6 (pierwsza forma kwadratowa)**.** Macierz $[g_{ij}]$ zdefiniowana powyżej wyznacza formę kwadratową, którą będziemy nazywać pierwszą formą kwadratową. Tradycyjnie jej macierz oznacza się: $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$.

Określenie metryki Riemanna, pozwala nam zdefiniować długość krzywej na powierzchni. Niech $c\colon [a,b] \to U \subset M$ będzie dowolną krzywą różniczkowalną, wtedy długość tej krzywej wynosi:

$$L(c) = \int_a^b \langle c'(t), c'(t)\rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_a^b \left(\sum_{i,j=1}^{2}\left(g_{ij}(c(t))c_i'(t)c_j'(t)\right)\right)^{\frac{1}{2}} dt$$

2.3 Geodezyjne

Definicja 2.3.1 (geodezyjna)**.** Niech $c\colon I \to M$ będzie parametryzacją krzywej, proporcjonalną do długości. Jeśli dla każdego $t_0 \in I$ istnieje $\delta > 0$ taka, że każdy odcinek $c|_{[t_0,t_1]}$ długości mniejszej niż δ jest najkrótszą krzywą łączącą $c(t_0)$ z $c(t_1)$, to mówimy, że c jest krzywą geodezyjną.

Przykład 2.3.2. Rozważmy sferę dwuwymiarową w $\mathbb{R}^3$. Pomiędzy dwoma punktami leżącymi na antypodach możemy poprowadzić nieskończenie wiele geodezyjnych. Jeśli natomiast wybierzemy dwa punkty leżące na równiku to istnieje dokładnie jedna geodezyjna łącząca te punkty.

Przykład 2.3.3. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ geodezyjne to odcinki.

Twierdzenie 2.3.4. *Niech M będzie powierzchnią, wówczas:*

(i) dla każdego $p \in M$ i $v \in T_pM$ istnieje $\epsilon > 0$ i dokładnie jedna, sparametryzowana łukowo geodezyjna $c\colon (-\epsilon, \epsilon) \to M$ taka, że $c(0) = p$ i $c'(0) = v$;

(ii) dwa dowolne, dostatecznie bliskie punkty M można połączyć dokładnie jedną, sparametryzowaną łukowo geodezyjną.

2.3.1 Równania różniczkowe geodezyjnych

Niech $[g_{ij}]$ oznacza macierz pierwszej formy kwadratowej. Przez $[g^{ij}]$ będziemy oznaczać macierz odwrotną do $[g_{ij}]$.

Definicja 2.3.5 (symbole Christoffela)**.** W ponieższych wzorach $i, j, k, s = 1, 2$.

1. Symbole Christoffela pierwszego rodzaju $\Gamma_{kij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}$,
2. Symbole Christoffela drugiego rodzaju: $\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{2} g^{ks}\Gamma_{jis}$.

Uwaga 2.3.6. $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Twierdzenie 2.3.7. *Niech $r\colon U \to M$ będzie lokalną parametryzacją (lokalną mapą), niech c będzie krzywą leżącą w $r(U)$ i niech $r^{-1}(c(t)) = (x_1(t), x_2(t))$. Następujące warunki są równoważne:*

(i) c jest geodezyjną sparametryzowaną łukowo,

(ii) c jest rozwiązaniem następującego układu równań różniczkowych:

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma^k_{ij}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0$$

dla $k = 1, 2$.

2.4 Krzywizna powierzchni

2.4.1 Krywizna Gaussa

Definicja 2.4.1 (odwzorowanie sferyczne)**.** Odwzorowaniem sferycznym nazywamy ciągłe przekształcenie $n\colon M \to S^2$, które każdemu punktowi powierzchni $M \subset \mathbb{R}^3$ przyporządkowuje wektor normalny do M.

Jeśli dla danej powierzchni M istnieje odwzorowanie sferyczne n, to mówimy, że powierzchnia M jest zorientowana.

Definicja 2.4.2. Niech $c\colon I \to M$ dowolna krzywa, $p \in M$. Definiujemy odwzorowanie $dn_p\colon T_pM \to T_{n(p)}S^2$ wzorem $dn_p(c'(p)) = (n \circ c)'(p)$.

Uwaga 2.4.3. Odwzorowanie dn_p jest liniowe.

Definicja 2.4.4 (krzywizna powierzchni)**.** Niech M powierzchnia, $p \in M$. Niech $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, będzie ciągiem otoczeń punktu p, których średnice dążą do zera. Liczbę:

$$K_M(p) = \operatorname{sgn}(\det dn_p) \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{pole} n(A_k)}{\operatorname{pole} A_k}$$

nazywamy krzywizną powierzchni M (krzywizną Gaussa) w punkcie p.

Przykład 2.4.5.
1. Krzywizna płaszczyzny wynosi zero, ponieważ każdemu punktowi płaszczyzny odwzorowanie n przyporządkowuje jeden, ten sam wektor, więc pole $n(A_k)$ zawsze wynosi 0.

2. Krzywizna sfery o promieniu R wynosi $\frac{1}{R^2}$, ponieważ dla dowolnego punktu p sfery dwuwymiarowej o promieniu R, $n(p) = \frac{1}{R}p$, a co za tym idzie $\text{pole}(A_k) = \frac{1}{R^2} \operatorname{pole} n(A_k)$.

Twierdzenie 2.4.6. *Jeśli M jest rozmaitością dwuwymiarową klasy C^2, to:*

$$\forall_{p \in M} K_M(p) = \det dn_p.$$

Lemat 2.4.7. *Jeśli $L\colon V \to V$ jest przekształceniem liniowym przestrzeni dwuwymiarowej, $v, w \in V$, to:*

$$\det[L(v), L(w)] = \det L \det[v, w].$$

Dowód. Niech α będzie bazą przestrzeni V, oraz niech dana będzie macierz L w tej bazie: $M_{\alpha\alpha}(L) = [\alpha_{ij}]$. Niech $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2)$. Wtedy:

$$\det[Lv, Lw] = \det \left([\alpha_{ij}] \begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix} \right) = \det L \det[v, w]. \qquad \square$$

Lemat 2.4.8. *Załóżmy, że U jest otwartym, spójnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Funkcje $f, g\colon U \to \mathbb{R}$ są ciągłe. Ponadto rodzina $\{\Delta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ podzbiorów U jest ciągiem otwartych, spójnych i ograniczonych otoczeń punktu p. Jeżeli* $\operatorname{diam} \Delta_k = \delta(\Delta_k) \to 0$, *to:*

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\int_{\Delta_k} f dx}{\int_{\Delta_k} g dx} = \frac{f(p)}{g(p)}.$$

Dowód. Niech m_k, M_k oznaczają odpowiednio najmniejszą i największą wartość funkcji f na zbiorze $\overline{\Delta_k}$ oraz niech $m(A)$ oznacza miarę Lebesguea zbioru A. Wtedy:

$$\frac{\int_{\Delta_k} f dx}{m(\Delta_k)} \in [m_k, M_k] = f(\overline{\Delta_k}).$$

Z twierdzenia o wartości pośredniej (własność Darboux) istnieje $x_k \in \overline{\Delta_k}$ takie, że:

$$\frac{\int_{\Delta_k} f dx}{m(\Delta_k)} = f(x_k).$$

Analogicznie, dla g istnieje y_k takie, że: $g(y_k) = \frac{\int_{\Delta_k} g dx}{m(\Delta_k)}$. Ponieważ $\delta(\Delta_k) \to 0$, oraz $p \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\Delta_k}$, więc $x_k \to p$ i $y_k \to p$, a stąd:

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\int_{\Delta_k} f dx}{\int_{\Delta_k} g dx} = \lim_{k \to \infty} \frac{\int_{\Delta_k} f dx}{m(\Delta_k)} \cdot \frac{m(\Delta_k)}{\int_{\Delta_k} g dx} = \lim_{k \to \infty} \frac{f(x_k)}{g(y_k} = \frac{f(p)}{g(p)}$$

$\square$

Dowód twierdzenia 2.4.6. Zauważmy, że $\operatorname{sgn} dn_p = \operatorname{sgn} K_M(p)$, więc aby udowodnić twierdzenie, wystarczy sprawdzić, że $|K_M(p)| = |\det(dn_p)|$. Niech $r\colon D \to M$ będzie lokalną mapą w otoczeniu punktu p. Niech $\{D_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem otwartych, spójnych, ograniczonych podzbiorów D takich, że $\delta(D_k) \to 0$. Wtedy $r^{-1}(p) \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} D_k$. Z definicji iloczynu wektorowego $|r_u \times r_v|$ jest polem równoległoboku rozpiętego na r_u i r_v i jest ono równe $|det[r_u, r_v]|$.

Zauważmy, że pole $n(r(D_k)$ można wyrazić przez całkę:

$$\iint_{D_k} |\det[(n\circ r)u,(n\circ r)v]|dudv = \iint_{D_k} |\det[dn_{(u,v)}(r_u), dn_{(u,v)}(r_v)]|dudv.$$

Niech $f(u,v) = |det[dn_{(u,v)}(r_u), dn_{(u,v)}(r_v)]|$. Z lematu 2.4.7 wynika:

$$f(u,v) = \det dn_{(u,v)}|det[r_u, r_v]|.$$

Niech $g(u,v) = |\det[r_u, r_v]|$.

$$|K_M(p)| = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{pole} n(r(D_k))}{\operatorname{pole} r(D_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\iint_{D_k} f(u,v)dudv}{\iint_{D_k} g(u,v)dudv} = \frac{f(p)}{g(p)} = |\det dn_p|.$$

□

2.4.2 Druga forma kwadratowa i przekroje normalne

Definicja 2.4.9 (druga forma kwadratowa)**.** Odwzorowanie, które każdemu punktowi $p \in M$ przyporządkowuje formę kwadratową:

$$T_pM \ni x \mapsto \langle -dn_p(x), x\rangle \in \mathbb{R}$$

nazywamy drugą formą kwadratową.

Poza zdefiniowaną wyżej formą kwadratową, będziemy rozpatrywać też wyznaczoną przez nią, formę dwulinową:

$$\Pi\colon T_pM \times T_pM \ni (x,y) \mapsto \langle -dn_p(x), y\rangle \in \mathbb{R}$$

Definicja 2.4.10 (przekrój normalny)**.** Niech $p \in M$, $x \in ST_pM = \{v \in T_pM : ||v|| = 1\}$. Niech P_x oznacza płaszczyznę rozpiętą na wektorach $n(p)$ oraz x. Przekrojem normalnym M w kierunku x nazywamy sparametryzowaną łukowo krzywą płaską c powstałą w wyniku przecięcia powierzchni M płaszczyzną P_x taką, że $c'|_p = x$ oraz $c(0) = p$.

Krzywiznę $K_c(p)$ nazywamy krzywizną przekroju normalnego i oznaczamy K_x. Aby jednoznacznie określić krzywiznę przekroju normalnego należy ustalić orientację płaszczyzny P_x. Jest ona zadana przez dodatnio zorientowaną bazę $x, n(p)$, tzn. układ $x, n(p)$ ma być reperem Freneta krzywej c w punkcie p.

Stwierdzenie 2.4.11. *Jeżeli* $p \in M$, $x \in ST_pM$, *to* $\Pi(x,x) = K_x$.

Dowód. Niech c oznacza przekrój normalny w kierunku x taki, że $c(0) = p$. Wówczas $c'(0) = x$. Ponieważ c leży na M więc $\langle c', n \circ c\rangle = 0$. Różniczkując ostatnią równość otrzymujemy:

$$\langle c''(0), (n \circ c)(0)\rangle + \langle c'(0), (n \circ c)'(0)\rangle = 0$$

Ponieważ $K_x = \langle c''(0), (n \circ c)(0)\rangle$, mamy:

$$K_x = -\langle c'(0), \frac{d(n \circ c)}{dt}(0)\rangle = -\langle c'(0), dn_p(\frac{dc}{dt}(0))\rangle = \Pi(c'(0), c'(0)) = \Pi(x,x)$$

□

Definicja 2.4.12 (przekształcenie samosprzężone)**.** Niech V dowolna przestrzeń z iloczynem sklaranym, oraz $A\colon V \to V$ pewien operator. Przez $A^\star$ oznaczmy taki operator, że: $A^\star\colon V \to V$ oraz $\forall_{x,y \in V} \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^\star y\rangle$. Jeśli $A = A^\star$, to mówimy, że A jest operatorem (przekształceniem) samosprzężonym.

Fakt 2.4.13. *Jeśli* $A\colon V \to V$ *odwzorowanie liniowe, samosprzężone, posiada dwie wartości własne* λ_1, λ_2 *oraz* v_1, v_2 *są wektorami własnymi odpowiadającymi tym wartościom własnym, to* $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

Dowód. Odwzorowanie A jest samosprzężone, więc $\langle Av_1, v_2\rangle = \langle v_1, Av_2\rangle$. Z definicji $Av_i = \lambda_i v_i$, czyli mamy $\langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle$. Stąd $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, co znaczy, że albo $\lambda_1 = \lambda_2$, albo $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, ale pierwsza możliwość jest wykluczona, bo zakładamy $\lambda_1 \neq \lambda_2$. □

Stwierdzenie 2.4.14. *a) Niech* $U \ni (x_1, x_2) \mapsto r(x_1, x_2) \in M$ *będzie lokalną parametryzacją* M, $p \in M$. *Niech* $\mathcal{N}\colon U \xrightarrow{r} M \xrightarrow{n} S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ *i* $\alpha = (r_{x_1}, r_{x_2})$ *będzie bazą* $T_{r(x_1,r_2)}M$. *Ponadto oznaczmy przez* $M_\alpha(\Pi)$ *macierz* Π *w bazie* α. *Wówczas* $M_\alpha(\Pi)$ *ma postać:*

$$M_\alpha(\Pi) = [\langle \mathcal{N}, r_{x_i x_j}\rangle].$$

b) $\Pi\colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ *jest formą dwuliniową symetryczną.*

c) $dn_p\colon T_pM \to T_pM$ *jest przekształceniem samosprzężonym.*

Dowód. a) Ponieważ wektory r_{x_1} i r_{x_2} są wektorami stycznymi, a wartości $\mathcal{N}$ są wektorami normalnymi, więc $\langle \mathcal{N}, r_{x_j}\rangle = 0$ dla $j = 1, 2$. Stąd:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i}\langle \mathcal{N}, r_{x_j}\rangle = \langle \mathcal{N}_{x_i}, r_{x_j}\rangle + \langle \mathcal{N}, r_{x_j x_i}\rangle.$$

Zatem:

$$\langle \mathcal{N}, r_{x_j x_i}\rangle = -\langle \mathcal{N}_{x_i}, r_{x_j}\rangle = -\langle dn(r_{x_i}), r_{x_j}\rangle = \Pi(r_{x_i}, r_{x_j}).$$

b) Ponieważ $r_{x_1 x_2} = r_{x_2 x_1}$, więc z punktu poprzedniego: $\Pi(r_{x_1}, r_{x_2}) = \Pi(r_{x_2}, r_{x_1})$. Liniowość wynika natomiast z liniowości pochodnej.

c) Niech $v, w \in T_{r(x_1,x_2)}M$, $p = r(x_1, x_2)$.

$$\langle dn_p(v), w\rangle = -\Pi(v, w) = -\Pi(w, v) = \langle dn_p(w), v\rangle = \langle v, dn_p(w)\rangle. \qquad \square$$

Uwaga 2.4.15. a) Odwzorowanie $\mathcal{N}\colon U \to \mathbb{R}^3$ opisane w poprzednim twierdzeniu, nazywa się odwzorowaniem Weingartena.

b) Tradycyjnie przyjmuje się oznaczenia (pochodzą one od Gaussa): $L = \langle \mathcal{N}, r_{x_1x_1}\rangle$, $N = \langle \mathcal{N}, r_{x_1x_2}\rangle$, $M = \langle \mathcal{N}, r_{x_2x_2}\rangle$. Przy powyższych oznaczeniach macierz drugiej formy kwadratowej ma postać: $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$.

Definicja 2.4.16 (krzywizny, wektory i kierunki główne)**.** Niech M powierzchnia, $p \in M$. Liczby $K_1 = \min_{y\in ST_pM} K_y$, $K_2 = \max_{y\in ST_pM} K_y$ nazywamy krzywiznami głównymi powierzchni M w punkcie p. Wektory $v_1, v_2 \in ST_pM$ takie, że $K_{v_i} = K_i$ nazywamy wektorami głównymi, a kierunki wyznaczone przez te wektory nazywamy kierunkami głównymi.

Definicja 2.4.17 (krzywizna średnia)**.** Liczbę $H = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$ nazywamy krzywizną średnią powierzchni M w punkcie p.

Twierdzenie 2.4.18. *a) Krzywizny główne K_1 i K_2 są wartościami własnymi odwzorowania $-dn_p\colon T_pM \to T_pM$, a wektory główne są unormowanymi wektorami własnymi.*

b) Zachodzi równość $K_M(p) = K_1K_2$.

c) Jeśli $y \in ST_pM$ i układ y_1, y_2 jest bazą ortonormalną wektorów głównych, oraz $\varphi = \sphericalangle(y, y_1)$, to: $K_y = K_1 \cos^2\varphi + K_2 \sin^2\varphi$.

Dowód. Niech $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ to wartości własne przekształcenia samosprzężonego $-dn_p$, oraz y_1, y_2 wektory własne odpowiadające tym wartościom własnym. Ponieważ $-dn_p$ jest samosprzężone, więc y_1, y_2 są ortogonalne. Możemy więc zakładać, że są one ortonormalne. Niech $y \in ST_pM$, oraz $a_i = \langle y, y_i\rangle$. Wtedy oczywiście $y = a_1y_1 + a_2y_2$. Ponieważ $y \in ST_pM$, mamy:

$$|y|^2 = 1 = \sum_{i,j=1}^{2} a_i^2\langle y_i, y_i\rangle = a_1^2 + a_2^2$$

A stąd:

$$K_y = \Pi(y, y) = \Pi(a_1y_1 + a_2y_2, a_1y_1 + a_2y_2) = \sum_{i,j=1}^{2} a_ia_j\langle -dn_py_i, y_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{2} a_ia_j\langle \lambda_iy_i, y_j\rangle = a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2.$$

Z powyższego wzoru i definicji K_y wynika w szczególności: $K_{y_i} = \lambda_i$, oraz $K_y \leqslant \max(\lambda_i)(a_1^2+a_2^2) = \lambda_2 = K_{y_2}$, $K_y \geqslant \min(\lambda_i)(a_1^2+a_2^2) = \lambda_1 = K_{y_1}$. Czyli rzeczywiście: K_{y_i} zdefiniowane jako λ_i spełniają definicję 2.4.16, co kończy dowód a).

Macierz $-dn_p$ w bazie y_1, y_2 ma postać: $\begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$. Korzystając z twierdzenia 2.4.6, dostajemy natychmiast $K_M(p) = K_1K_2$, co kończy dowód b).

Niech $\varphi = \sphericalangle(y, y_1)$. Wiemy, że $\sphericalangle(y_1, y_2) = \frac{\pi}{2}$, stąd: $\sphericalangle(y, y_2) = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Z wzoru $\cos\sphericalangle(x, y) = \frac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$ i z faktu, że $|y| = |y_1| = |y_2| = 1$ mamy: $\langle y, y_2\rangle = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami: $y = \langle y, y_1\rangle y_1 + \langle y, y_2\rangle y_2 = \cos\varphi y_1 + \sin\varphi y_2$. Ponieważ $K_y = a_1^2 K_{y_1} + a_2^2 K_{y_2}$, mamy natychmiast: $K_y = \cos^2\varphi K_1 + \sin^2\varphi K_2$. □

2.4.3 Lokalny układ współrzędnych

Twierdzenie 2.4.19. *Niech M będzie pewną powierzchnią, $p \in M$ oraz niech r będzie parametryzacją pewnego otoczenia p. Niech $[g_{ij}]$ i $[l_{ij}]$ oznaczają odpowiednio macierze pierwszej i drugiej formy kwadratowej w bazie $x_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, x_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}$. Wtedy:*

(i) $K_M(p) = \frac{\det[\Pi(x_i,x_j)]}{\det[\langle x_i,x_j\rangle]} = \frac{\det[l_{ij}]}{\det[g_{ij}]}$,

(ii) $w = |r_{x_1} \times r_{x_2}| = \sqrt{\det[g_{ij}]}, l_{ij} = \frac{1}{w}\langle r_{x_1} \times r_{x_2}, r_{x_1x_2}\rangle = \frac{1}{w}\det[r_{x_1}, r_{x_2}, r_{x_1x_2}]$,

(iii) niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ klasy C^2 i niech powierzchnia M dana jest wzorem $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = f(x_1, x_2)\}$, oraz $\Lambda = \sqrt{1 + f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2}$, wtedy:

$$l_{ij} = \frac{f_{x_ix_j}}{\Lambda}, \quad K_M = \frac{\det[f_{x_ix_j}]}{\Lambda^4}.$$

Dowód. Niech $\beta = (y_1, y_2)$ będzie bazą ortonormalną w T_pM, składającą się z wektorów własnych operatora $-dn_p$. Z poprzedniego twierdzenia wiemy, że są to też wektory główne. Dla dowolnego $k = 1, 2$ zachodzi oczywiście:

$$x_k = \langle x_k, y_1\rangle y_1 + \langle x_k, y_2\rangle y_2. \quad (\star)$$

Ponadto $\Pi(y_i, y_j) = \langle -dn_p(y_i), y_j\rangle = K_i\langle y_i, y_j\rangle = K_i\delta_{ij}$. Wiemy już z poprzednich rozważań, że: $\det[\Pi(y_i, y_j)] = K_M(p)$. Niech $M_\alpha(\Pi) = [\Pi(x_i, x_j)]$, $M_\beta(\Pi) = [\Pi(y_i, y_j)]$ będą macierzami Π w bazach $\alpha = (x_i, x_j)$ i $\beta = (y_i, y_j)$. Zgodnie z wzorem $(\star)$ macierz $C = [\langle x_i, y_j\rangle]^T$ jest macierzą przejścia z bazy α do β. Stąd

$$\det M_\alpha(\Pi) = \det(CM_\beta(\Pi)C^T) = K_M(p)\det C^2 \quad (\star\star)$$

Podobnie dla pierwszej formy kwadratowej (którą oznaczamy przez I):

$$\det M_\alpha(I) = \det[\langle x_i, x_j\rangle] = \det[\langle y_i, y_j\rangle]\det C^2 = \det C^2$$

Z wzoru ($\star\star$) mamy: $K_M(p) = \frac{\det[\Pi(x_i,x_j)]}{\det C^2} = \frac{\det[\Pi(x_i,x_j)]}{\det[\langle x_i,x_j\rangle]}$ co kończy dowód punktu (i).

Zgodnie z definicją iloczynu wektorowego oraz elementów g_{ij}, mamy równości: $w = |r_{x_1} \times r_{x_2}| = \sqrt{\det[g_{ij}]} = \sqrt{|\det[\langle r_{x_i}, r_{x_j}\rangle]|}$. Ponieważ odwzorowanie sferyczne wyraża się wzorem: $n(u,v) = \frac{r_u \times r_v}{|r_u \times r_v|}$, odwzorowanie Weingartena spełnia:

$$\mathcal{N} = |r_{x_1} \times r_{x_2}|^{-1}(r_{x_1} \times r_{x_2}) = w^{-1}(r_{x_1} \times r_{x_2}).$$

Pokazaliśmy wcześniej, że $l_{ij} = \langle \mathcal{N}, r_{x_i x_j}\rangle$, wobec czego:

$$l_{ij} = \frac{1}{w}\langle r_{x_1} \times r_{x_2}, r_{x_i x_j}\rangle = \frac{1}{w}\det[r_{x_1}, r_{x_2}, r_{x_i x_j}],$$

co kończy dowód punktu (ii).

Policzmy teraz pochodne r_{x_1} i r_{x_2} i $r_{x_i x_j}$:

$$r_{x_1} = (1, 0, f_{x_1}), r_{x_2} = (0, 1, f_{x_2}), r_{x_i x_j} = (0, 0, f_{x_i x_j})$$

Zgodnie ze wzorem na $\mathcal{N}$, mamy:

$$\mathcal{N} = \frac{(r_{x_1} \times r_{x_2})}{|r_{x_1} \times r_{x_2}|} = \frac{(-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1)}{|(-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1)|} = \Lambda^{-1}(f_{x_1}, f_{x_2}, 1).$$

Podstawiając ten wynik do wzoru na l_{ij} otrzymujemy:

$$l_{ij} = \langle \mathcal{N}, r_{x_i x_j}\rangle = \Lambda^{-1}\langle(-f_{x_1}, -f_{x_2}, 1), (0, 0, f_{x_i x_j})\rangle = \Lambda^{-1} f_{x_i x_j}.$$

Korzystając teraz ze wzoru $g_{ij} = \langle r_{x_i}, r_{x_j}\rangle$ uzyskujemy:

$$\det[g_{ij}] = \det\begin{bmatrix} 1 + f_{x_1}^2 & f_{x_1} f_{x_2} \\ f_{x_1} f_{x_2} & 1 + f_{x_2}^2 \end{bmatrix} = (1 + f_{x_1}^2)(1 + f_{x_2}^2) - f_{x_1}^2 f_{x_2}^2.$$

Podstawiając otrzymane wyniki do wzoru na K_M z punktu (i) otrzymujemy:

$$K_M = \frac{\det[l_{ij}]}{\det[g_{ij}]} = \frac{\Lambda^{-2}\det[f_{x_i} f_{x_j}]}{\Lambda^2} = \frac{\det[f_{x_i} f_{x_j}]}{\Lambda^4}.$$

□

Uwaga 2.4.20. Jeśli przyjmiemy tradycyjne oznaczenia macierzy pierwszej i drugiej formy kwadratowej, odpowiednio: $\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$, wzór na krzywiznę ma postać:

$$K_M = \frac{LN - M^2}{EF - G^2},$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
E = \langle r_u, r_u\rangle, F &= \langle r_u, r_v\rangle, G = \langle r_v, r_v\rangle \\
L &= \frac{1}{w}\langle r_u \times r_v, r_{uu}\rangle = \frac{1}{w}\det[r_u, r_v, r_{uu}], \\
M &= \frac{1}{w}\langle r_u \times r_v, r_{uv}\rangle = \frac{1}{w}\det[r_u, r_v, r_{uv}], \\
N &= \frac{1}{w}\langle r_u \times r_v, r_{vv}\rangle = \frac{1}{w}\det[r_u, r_v, r_{vv}], \\
w &= |r_u \times r_v| = \sqrt{EG - F^2}.
\end{aligned}
$$

Przykład 2.4.21 (płaszczyzna z ujemną krzywizną)**.** Płaszczyzna M zadana jest równaniem $z = x^2 - y^2$, czyli $f(x, y) = x^2 - y^2$, a dowolny punkt powierzchni ma współrzędne $(x, y, x^2 - y^2)$. Wtedy $f_{xx} = 2$, $f_{yy} = -2$, $f_{xy} = 0$ i mamy:

$$
K_M = \frac{\det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}{\left(\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\right)^4} = \frac{-4}{\left(\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\right)^4} < 0
$$

2.5 Twierdzenie Egregium

Definicja 2.5.1 (dyfeomorfizm)**.** Odwzorowanie gładkie nazywamy dyfeomorfizmem o ile jest bijekcją i odwzorowanie odwrotne jest również gładkie.

Definicja 2.5.2 (izomorfizm)**.** Niech M, N powierzchnie z metrykami Riemanna $\langle , \rangle_M$ i $\langle , \rangle_N$. Dyfeomorfizm $f\colon M \to N$ nazywamy izometrią jeżeli:

$$
\forall_{p\in M}\forall_{v,w\in T_pM}\langle df_p(v), df_p(w)\rangle_N = \langle v, w\rangle_M
$$

Fakt 2.5.3. *Dla izomorfizmów $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ następujące warunki są równoważne:*

(i) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^n} d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, *gdzie d to metryka Euklidesowa,*

(ii) dla każdej krzywej różniczkowalnej $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ zachodzi: $L(c) = L(f \circ c)$,

(iii) $\forall_{x\in\mathbb{R}^n}\forall_{v,w\in T_x\mathbb{R}^n}\langle df_x(v), df_x(w)\rangle = \langle v, w\rangle$.

Twierdzenie 2.5.4 (egregium, Gauss, 1828)**.** *Niech M, N powierzchnie. Jeżeli $f\colon M \to N$ jest izometrią, to $\forall_{p\in M} K_M(p) = K_N(f(p))$.*

Twierdzenie egregium udowodnimy w nieco innej wersji. Aby ją sformułować, wprowadzimy najpierw kilka definicji. Niech $[g_{ij}]$ i $[h_{ij}]$ to macierze odpowiednio pierwszej i drugiej formy kwadratowej pewnej powierzchni M. Przez $[g^{ij}]$ oznaczamy macierz odwrotną do $[g_{ij}]$. Symbol $g_{ij,k}$ oznacza pochodną względem zmiennej k z g_{ij}.

Definicja 2.5.5 (tensor krzywizny)**.** Tensor krzywizny powierzchni M jest zbiorem funkcji:

$$R_{iljk} = \sum_m g_{lm} R^m_{ijk} \quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant 2$$

gdzie:

$$R^m_{ijk} = \Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l (\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{ij}) \quad 1 \leqslant i, j, k, m \leqslant 2$$

Rozważmy powierzchnię M sparametryzowaną przez funkcję $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Niech $u \in \mathbb{R}^2$, wtedy $p = f(u)$ jest pewnym punktem powierzchni M, a na punkt u możemy patrzeć jak na lokalne współrzędne punktu p. Wektory $f_1(u), f_2(u), n(u)$ stanowią bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przy czym przez $f_i(u)$ rozumiemy wektory styczne do M w punkcie p, wyznaczone za pomocą i-tej pochodnej cząstkowej f, natomiast wektor $n(u)$ to wektor normalny zaczepiony w p. Wektory f_1, f_2 wyznaczają przestrzeń styczną do M w p.

Twierdzenie 2.5.6 (egregium)**.** *Przy powyższych założeniach i oznaczeniach, zachodzi wzór:*

$$K_M(u) = \frac{R_{1212}(u)}{\det[g_{ij}(u)]}$$

Zanim podamy dowód twierdzenia egregium udowodnimy kilka faktów pomocniczych.

Fakt 2.5.7. *Zachodzą następujące wzory:*

$$f_{ik}(u) = \sum_l \Gamma^l_{ik}(u) f_l(u) + h_{ik}(u) n(u),$$

$$n_i(u) = -\sum_{l,k} h_{il} g^{lk} f_k(u),$$

gdzie:

$$\Gamma^l_{ik} = \sum_j g^{lj} \langle f_{ik}, f_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_j g^{lj}(g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j}).$$

Uwaga 2.5.8. Zakładamy, że wektory f_1, f_2, n stanowią układ ortonormalny.

Dowód. Z algebry liniowej wiadomo, że:

$$f_{ik} = f_{ki} = \sum_l \Gamma^l_{ik} f_l + a_{ik} n,$$

przy czym $a_{ik} = \langle n, f_{ik} \rangle = h_{ik}$. Obie strony powyższej równości pomnóżmy skalarnie przez f_i:

$$\langle f_{ik}, f_i \rangle = \langle \sum_l \Gamma^l_{ik} f_l, f_i \rangle = \sum_l \Gamma^l_{ik} g_{li} = [\Gamma^l_{ik}][g_{il}]$$

Stąd mamy:

$$\Gamma^l_{ik} = \sum_l g^{li} \langle f_{ik}, f_i \rangle = \Gamma^l_{ki}.$$

Ponieważ $g_{ij,k} = \langle f_i, f_j \rangle_k$, to z uzyskanych wyżej wzorów (i z wzoru na pochodną iloczynu skalarnego) mamy:

$$\begin{aligned} g_{ij,k} &= \langle f_{ik}, f_j \rangle + \langle f_i, f_{jk} \rangle = \\ &= \textstyle\sum_l \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \sum_l \Gamma^l_{jk} g_{li} \quad (\alpha) \\ g_{ki,j} &= \textstyle\sum_l \Gamma^l_{kj} g_{lj} + \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} \quad (\beta) \\ g_{jk,i} &= \textstyle\sum_l \Gamma^l_{ji} g_{ik} + \sum_l \Gamma^l_{ki} g_{ij} \quad (\gamma) \end{aligned}$$

Policzmy teraz $(\alpha) - (\beta) + (\gamma)$:

$$\sum_l \Gamma^l_{ik} g_{lj} + \sum_l \Gamma^l_{jk} g_{li} - \sum_l \Gamma^l_{kj} g_{lj} - \sum_l \Gamma^l_{ij} g_{lk} + \sum_l \Gamma^l_{ji} g_{ik} + \sum_l \Gamma^l_{ki} g_{ij} = 2 \sum_l \Gamma^l_{ik} g_{lj}$$

A stąd:

$$\Gamma^l_{ik} = \sum_j g^{lj} \langle f_{ik}, f_j \rangle = \frac{1}{2} \sum_j g^{lj} (g_{ij,k} + g_{jk,i} - g_{ki,j})$$

□

Twierdzenie 2.5.9. *Równości $f_{ijk} = f_{ikj}$ oraz $n_{ij} = n_{ji}$ są równoważne następującym zależnościom między g_{ik}, h_{ik}, $g_{ik,l}$ oraz $\Gamma^k_{ij,l}$:*

(i) $\Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l (\Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik} \Gamma^m_{lj}) = \sum_l (h_{ij} h_{kl} - h_{ik} h_{jl}) g^{lm}$,

(ii) $\sum_l \Gamma^l_{ij} h_{lk} - \sum_l \Gamma^l_{ik} h_{lj} + h_{ij,k} - h_{ik,j} = 0$.

Równania (i) nazywa się równaniami Gaussa, natomiast równania (ii) nazywa się równaniami Codazzi–Mainardiego.

Dowód. Niech $f_{ijk} = \sum_m A^m_{ijk} f_m + B_{ijk} n$. Na mocy faktu 2.5.7, możemy wyrazić A^m_{ijk} jako[1]:

$$A^m_{ijk} = \Gamma^m_{ij,k} + \sum_l \Gamma^l_{ij} \Gamma^m_{lk} - \sum_l h_{ij} h_{kl} g^{lm}.$$

Z założenia $f_{ijk} = f_{ikj}$, więc $A^m_{ijk} = A^m_{ikj}$, skąd natychmiast (wystarczy zapisać wzory na A^m_{ijk} i A^m_{ikj} i przenieść niektóre składniki na drugą stronę w równaniu $A^m_{ijk} = A^m_{ikj}$) otrzymujemy (i).

Ponownie, korzystając z faktu 2.5.7 możemy napisać:

$$B_{ijk} = \sum_l \Gamma^l_{ij} h_{lk} + h_{ij,k}.$$

Ponieważ $B_{ijk} = B_{ikj}$, to zachodzi (ii). □

[1]Fakt 2.5.7 daje wzór na f_{ij}, który trzeba zróżniczkować względem k-tej współrzędnej, a następnie skorzystać z wzoru na n_i i ostatecznie napisać wzór na współczynnik przy f_m dla ustalonego m. Jest to techniczny „szczegół”, który pomijamy w tym opracowaniu.

Lemat 2.5.10. *Tensory krzywizny R_{iljk} spełniają:*

$$R_{iljk} = h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl}.$$

Uwaga 2.5.11. Będziemy wykorzystywać jedynie fakt:

$$R_{1212} = \det[h_{ij}],$$

który jest wnioskiem z powyższego lematu.

Dowód. Z definicji:

$$R_{iljk} = \sum_m g_{lm}R^m_{ijk} = \sum_m g_{lm}\left(\Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l(\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj})\right) =$$

Stosujemy teraz punkt (i) z poprzedniego twierdzenia:

$$= \sum_m g_{lm}\left(\sum_l(h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl})g^{lm}\right) \qquad (\star)$$

Z definicji $[g^{ij}]$ jako macierzy odwrotnej do $[g_{ij}]$, mamy:

$$g_{l1}g^{11} + g_{l2}g^{12} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } l = 1 \\ 0 & \text{gdy } l = 2 \end{cases}$$

$$g_{l1}g^{21} + g_{l2}g^{22} = \begin{cases} 0 & \text{gdy } l = 1 \\ 1 & \text{gdy } l = 2 \end{cases}$$

Rozpisując sumę z wzoru $(\star)$ i grupując odpowiednio składniki, oraz stosując powyższe zależności, otrzymujemy tezę lematu. □

Dowód twierdzenia egregium. Zauważmy, że dowód powyższego lematu jest właściwie dowodem twierdzenia egregium. Z twierdzenia 2.4.19 mamy bowiem:

$$K_M = \frac{\det[h_{ij}]}{\det[g_{ij}]},$$

a z lematu $\det[h_{ij}] = R_{1212}$, czyli rzeczywiście:

$$K_M = \frac{R_{1212}}{\det[g_{ij}]}.$$ □

2.6 Twierdzenie Gaussa–Bonneta

Twierdzenie 2.6.1 (elegantissimus Gaussa)**.** *Niech D będzie trójkątem geodezyjnym, α_i, $i = 1, 2, 3$ jego kątami zewnętrznymi, a $\beta_i = \pi - \alpha_i$. Wtedy:*

$$\sum_{i=1}^{3} \beta_i = \pi + \iint_D K d\sigma.$$

Definicja 2.6.2 (defekt trójkata geodezyjnego)**.** Liczbę $\pi - \sum_{i=1}^{3} \beta_i$ nazywamy defektem trójkąta geodezyjnego.

Twierdzenie 2.6.1 jest szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego twierdzenia Gaussa–Bonneta.

Twierdzenie 2.6.3 (Gaussa–Bonneta, 1848)**.** *Jeżeli D jest podzbiorem dwuwymiarowej rozmaitości, ograniczonym łamaną geodezyjną $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_r$, a $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ to kąty zewnętrzne D, to:*

$$\iint_D K d\sigma + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j = 2\pi$$

Istnieje również tzw. globalna wersja tego twierdzenia. Aby ją sformułować należy wprowadzić pojęcie triangulacji powierzchni. Okazuje się (czego nie udowodnimy), że dowolną powierzchnię M można przedstawić jako sumę (pokryć sumą) trójkątów krzywoliniowch, takich, że część wspólna każdych dwóch z nich to: zbiór pusty, pojedynczy wierzchołek lub krawędź.

Definicja 2.6.4 (charakterystyka Eulera)**.** Niech M powierzchnia z wprowadzoną triangulacją. Wtedy liczbę:

$$\chi(M) = \text{liczba wierzchołków} - \text{liczba krawędzi} + \text{liczba trójkątów}$$

nazywamy charakterystyką Eulera powierzchni M.

Uwaga 2.6.5. Liczba $\chi(M)$ jest niezmiennikiem topologicznym.

Twierdzenie 2.6.6 (Gaussa–Bonneta (globalne))**.** *Niech M powierzchnia. Wtedy:*

$$\iint_M K d\sigma = 2\pi\chi(M).$$

Twierdzenie 2.6.7 (Harriot, 1603)**.** *Dla dowolnego trójkąta na sferze o kątach $\alpha, \beta\gamma$, funkcja $f(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ jest proporcjonalna do powierzchni trójkąta i stąd niezerowa.*

Dowód. 1. Pole sektora kąta α pomiędzy dwoma kołami wielkimi sfery wynosi $\frac{\alpha}{2\pi}$ powierzchni całej sfery S^2.

2. Pole jest niezmiennikiem izometrii.

3. Pole jest funkcją addytywną, tzn. $P(\Delta_1 + \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$.

4. Niech $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ będzie dowolnym trójkątem na S^2. Przedłużając boki tego trójkąta do kół wielkich, otrzymujemy podział S^2 na 8 trójkątów. Niech Δ_α, Δ_β i Δ_γ oznaczają odpowiednio trójkąty przylegające do jednego z wierzchołków $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ przy odpowiednim kącie. Wówczas na mocy punktu 1 mamy:

$$\begin{aligned} P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + P(\Delta_\alpha) &= \tfrac{\alpha}{2\pi} P(S^2), \\ P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + P(\Delta_\beta) &= \tfrac{\beta}{2\pi} P(S^2), \\ P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + P(\Delta_\gamma) &= \tfrac{\gamma}{2\pi} P(S^2), \end{aligned}$$

A stąd wynika, że:

$$3P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + P(\Delta_\alpha) + P(\Delta_\beta) + P(\Delta_\gamma) = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\pi} P(S^2) \quad (\star).$$

Cztery trójkąty $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$, Δ_α, Δ_β, Δ_γ są izomroficzne z czterema pozostałymi trójkątami powstałymi w kroku 4. Z punktu 2 mamy więc, że:

$$P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + P(\Delta_\alpha) + P(\Delta_\beta) + P(\Delta_\gamma) = \frac{1}{2} P(S^2) \quad (\star\star).$$

Z równości $(\star)$ i $(\star\star)$ wynika:

$$3P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) - P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) + \frac{1}{2} P(S^2) = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2\pi} P(S^2).$$

A stąd:

$$\begin{aligned} 2P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) &= \frac{1}{2} P(S^2) \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\pi} - 1 \right), \\ 2P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) &= \frac{1}{2\pi} P(S^2) \left(\alpha+\beta+\gamma-\pi \right). \end{aligned}$$

Czyli mamy:

$$P(\Delta_{\alpha\beta\gamma}) = \frac{1}{4\pi} P(S^2) f(\alpha, \beta, \gamma).$$ □

2.6.1 Płaszczyzna hiperboliczna

W drodze do dowodu twierdzenia Gaussa–Bonneta, które sformułowano na początku tego rozdziału, przyjrzymy się bliżej trójkątom na płaszczyźnie hiperbolicznej, która w pewnym sensie będzie ilustracją zagadnień, którymi się tu zajmujemy.

Płaszczyznę hiperboliczną będziemy oznaczać przez $\mathbb{H}^2$. Jako zbiór jest to po prostu część płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, a mianowicie: $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Metryka Riemanna na powierzchni hiperbolicznej określona jest w następujący sposób:

$$\langle , \rangle_{(x,y)} = \frac{1}{y^2}(d_x^2 + d_y^2).$$

Macierz pierwszej formy kwadratowej ma postać:

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{bmatrix}.$$

Powierzchnia hiperboliczna ma stałą krzywiznę równą -1.

Geodezyjne na płaszczyźnie hiperbolicznej. Aby scharakteryzować geodezyjne na płaszczyźnie hiperbolicznej, rozwiążemy równania różniczkowe geodezyjnych, opisane w podrozdziale 2.3.1:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^1 \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^2 \frac{dx_i}{dt}\frac{dx_j}{dt} = 0 \end{cases}$$

Wyliczymy najpierw Γ_{ij}^k. Ponieważ $g^{ij} = \delta_{ij}y^2$, to mamy (z wzoru na Γ_{ij}^k):

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kk}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) = \frac{1}{2g_{kk}} \begin{cases} g_{kk,i} & \text{gdy } j = k \\ -g_{ii,k} & \text{gdy } j = i, k \neq i \end{cases}$$

Co daje nam wzory:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2g_{22}}(-g_{11,2}) = \frac{1}{2}y^2\left(\frac{-1}{y^2}\right)'_y = \frac{1}{2}y^2\frac{2y}{y^4} = \frac{1}{y}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}y^2\left(\frac{-2y}{y^4}\right) = \frac{-1}{y}, \end{aligned}$$

a pozostałe $\Gamma_{ij}^k = 0$. Otrzymane wyniki wstawiamy do rozpatrywanych równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} - \frac{2}{y}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_2}{dt} = 0 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{1}{y}\frac{dx_1}{dt}\frac{dx_1}{dt} - \frac{1}{y}\frac{dx_2}{dt}\frac{dx_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

Zamiast pisać x_1, x_2 będziemy dalej używać standardowych oznaczeń na zmienne x, y. Nasze równania mają postać:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt} \end{cases}$$

Aby rozwiązać ten układ równań zastosujemy podstawienie:

$$p = \frac{dx}{dy} = \frac{dx}{dt}\frac{\frac{1}{dy}}{dt},$$

co daje nam:

$$\frac{dx}{dt} = p\frac{dy}{dt}.$$

Powyższą równość różniczkujemy obustronnie po t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}\frac{dy}{dt} + p\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Ponieważ $\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dt}$, to mamy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + p\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Podstawiając powyższe do pierwszego równania naszego układu równań, mamy:

$$\frac{dp}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + p\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}.$$

Teraz podstawiamy drugie równanie z układu równań za $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$:

$$\frac{dp}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + p\left(\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{1}{y}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = \frac{2}{y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}.$$

Z definicji p mamy:

$$\frac{dp}{dy}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{p}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \frac{p^3}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{2p}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2.$$

Otrzymane równanie dzielimy obustronnie przez $\left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ i otrzymujemy:

$$\frac{dp}{dy} + \frac{p}{y} - \frac{p^3}{y} = \frac{2p}{y}$$

$$\frac{dp}{dy} = \frac{p+p^3}{y}$$

$$\frac{dp}{p+p^3} = \frac{dy}{y}$$

Otrzymane równanie możemy obustronnie scałkować:

$$\int \frac{dp}{p+p^3} = \int \frac{dy}{y},$$

co daje nam:

$$\ln p - \ln\sqrt{p^2+1} = \ln y + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\ln\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = \ln c_1 y, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Z różnowartościowości funkcji logarytm mamy, że:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = c_1 y$$

$$\frac{p^2}{p^2+1} = c_1^2 y^2$$

$$p^2 = c_1^2 y^2 (p^2+1)$$

$$p^2(1-c_1^2y^2) = c_1^2 y^2$$

Zakładamy, że $y \neq \frac{1}{c_1}$ i dzielimy obustronnie przez $(1-c_1^2y^2)$:

$$p^2 = \frac{c_1^2y^2}{1-c_1^2y^2} \quad p = \frac{c_1 y}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}.$$

Z definicji p, mamy więc, że:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{c_1 y}{\sqrt{1-c_1^2y^2}}.$$

Rozważmy dwa przypadki. Przypadek 1, gdy $c_1 = 0$, wtedy $\frac{dx}{dy} = 0$, czyli $x = a$, $a \in \mathbb{R}$. Przypadek 2, gdy $c_1 \neq 0$. Podstawmy wtedy $c_1 = \frac{1}{a}$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$. Wtedy:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{y}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}.$$

Stąd mamy:

$$dx = \frac{\frac{y}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}dy,$$

co możemy obustronnie scałkować:

$$\int dx = \int \frac{\frac{y}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}}dy$$

i stąd:

$$x = -\sqrt{a^2-y^2} + b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$(x-b)^2 = a^2 - y^2$$

$$(x-b)^2 + y^2 = a^2$$

Wniosek 2.6.8. Geodezyjne w $\mathbb{H}^2$ to albo półproste $\{(a,y) : y > 0, a \in \mathbb{R} \text{ ustalone}\}$, albo górne półokręgi ze środkiem na osi OX.

Trójkąty asymptotyczne. Zajmiemy się teraz trójkątami asymptotycznymi, czyli takimi, których jeden kąt wewnętrzny wynosi 0.

Twierdzenie 2.6.9. *Pole trójkąta asymptotycznego $\Delta_{\alpha\beta}$ o kątach α, β jest równe $\pi - (\alpha + \beta)$.*

Dowód. Niech $\lambda = \cos(\pi - \alpha)$, $\mu = \cos(\beta)$.

$$P(\Delta_{\alpha\beta}) = \iint_{\Delta_{\alpha\beta}} \frac{dxdy}{y^2} = \int_\lambda^\mu dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^\infty \frac{dy}{y^2} = \int_\lambda^\mu \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

Stosujemy podstawienie $x = \cos\theta$:

$$= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} -1\ d\theta = -\beta + \pi - \alpha = \pi - \alpha - \beta. \qquad \square$$

Wniosek 2.6.10. Pole $\Delta_{\alpha\beta\gamma}$ jest równe $\pi - (\alpha + \beta + \gamma) < \pi$.

2.6.2 Współrzędne geodezyjne

Definicja 2.6.11 (pole wektorowe wzdłuż krzywej)**.** Niech M powierzchnia, $c\colon I \to M$ pewna krzywa. Funkcję gładką, która każdemu punktowi $t \in I$ przyporządkowuje wektor $v(t) \in T_{c(t)}M$ nazywamy polem wektorowym określonym wzdłuż c. Zbiór pól wektorowych określonych wzdłuż c oznaczać będziemy $\mathfrak{X}_c$.

Przykład 2.6.12. Najbardziej naturalnym polem wektorowym wzdłuż krzywej różniczkowalnej jest:

$$t \mapsto c'(t),$$

czyli pole wektorów stycznych do c.

Definicja 2.6.13 (pochodna kowariantna)**.** Niech $X \in \mathfrak{X}_c$ oraz niech projekcja $pr_{c(t)}\colon \mathbb{R}^3 \to T_{c(t)}M$ jest rzutem ortogonalnym. Wtedy wektor:

$$\frac{DX}{dt}(t) = pr_{c(t)}\frac{dX}{dt}(t),$$

nazywamy pochodną kowariantną pola X w punkcie $c(t)$.

Twierdzenie 2.6.14. *Jeżeli krzywa u jest gładka, $X, Y \in \mathfrak{X}_u$, $a, b \in \mathbb{R}$, funkcja $f\colon M \to \mathbb{R}$ jest klasy C^∞, to pochodna kowariantna ma następujące własności:*

(i) $\frac{D(aX+bY)}{dt} = a\frac{DX}{dt} + b\frac{DY}{dt}$,

(ii) $\frac{D(fX)}{dt} = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$,

(iii) $\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle$.

Dowód. Punkt (i) wynika wprost z liniowości pochodnej i rzutowania. Przejdźmy do dowodu (ii). Z definicji:

$$\frac{D(fX)}{dt} = pr\left(\frac{d(fX)}{dt}\right) =$$

Zgodnie z wzorem na pochodną iloczynu, mamy:

$$= pr\left(\frac{df}{dt}X + f\frac{dX}{dt}\right) =$$

Co z liniowości projekcji ortogonalnej równe jest:

$$= pr\left(\frac{df}{dt}X\right) + pr\left(f\frac{dX}{dt}\right) =$$

Ponieważ $\frac{df}{dt}X$ jest elementem $T_{u(t)}M$, mamy:

$$= \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}.$$

W ten sposób udowodniliśmy punkt (ii). Przejdźmy do dowodu (iii). Zauważmy po pierwsze, że:

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle\frac{dX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{dY}{dt}\rangle.$$

Wektor $\frac{dX}{dt}$ można zapisać jako:

$$\frac{dX}{dt} = pr_{u(t)}\left(\frac{dX}{dt}\right) + V,$$

gdzie V to wektor normalny do $T_{u(t)}M$. Stąd:

$$\langle\frac{dX}{dt}, Y\rangle = \langle\frac{DX}{dt}, Y\rangle + \underbrace{\langle V, Y\rangle}_{=0}$$

Analogicznie pokazujemy, że $\langle X, \frac{dY}{dt}\rangle = \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle$, co w rezultacie daje punkt (iii). $\square$

Definicja 2.6.15 (pole wektorowe równoległe)**.** Pole wektorowe $X \in \mathfrak{X}_c$ jest równoległe, jeżeli $\frac{DX}{dt} = 0$ dla każdego $t \in I$.

Uwaga 2.6.16. Jeżeli pola X, Y są równoległe, to:

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y\rangle = \langle\frac{DX}{dt}, Y\rangle + \langle X, \frac{DY}{dt}\rangle = 0,$$

stąd $\langle X, Y\rangle = const$. W szczególności więc, pola równoległe mają stałą długość. Stały jest też kąt między nimi.

Lemat 2.6.17. *Przypuśćmy, że M to powierzchnia sparametryzowana tak, że $g_{12} = 0$. Wtedy $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$ oraz $\Gamma^k_{ik} = \frac{g_{kk,i}}{2g_{kk}}$.*

Dowód lematu wynika wprost z wcześniejszych rozważań (z poprzednich podrozdziałów).

Twierdzenie 2.6.18. *Krzywa $c(t)$ jest geodezyjną o ile pochodna kowariantna pola wektorów stycznych jest równa zero.*

Twierdzenie 2.6.19 (istnienie ortogonalnych współrzędnych geodezyjnych)**.** *Niech $c(s)$ będzie krzywą na powierzchni M. Ustalmy $s_0 \in I$, takie, że $c'(s_0) \neq 0$. Istnieje zamiana zmiennych (map) $\phi\colon U \to V' \subset M$, gdzie V' jest otwartym otoczeniem $c(s_0)$, taka, że spełnione są poniższe warunki.*

(i) $c(s) = \phi(u^1(s), u^2(s))$ dla $|s - s_0|$ dostatecznie małych, ma parametryzację $u^1 = 0$, $u^2 = s$.

(ii) Krzywe $u^2 = const$ są geodezyjnymi sparametryzowanymi przez długość łuku. Krzywe $u^1 = const$ przecinają się z nimi ortogonalnie.

(iii) Parametryzacja $u = (u^1, u^2)$ jest ortogonalnym układem współrzędnych dla ϕ, tzn. $g_{12} = 0$, $g_{11} = 1$, $g_{22} > 0$.

Odwrotnie, jeżeli macierz pierwszej formy kwadratowej ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22} \end{bmatrix}$, to punkt (ii) jest prawdziwy.

Definicja 2.6.20 (współrzędne geodezyjne)**.** Współrzędne spełniające warunki (i), (ii) z powyższego twierdzenia nazywamy współrzędnymi geodezyjnymi.

Twierdzenie 2.6.21. *Niech powierzchnia M ma współrzędne geodezyjne. Wtedy geodezyjna dana wzorem:*

$$c = \{c(t) = f(t, u_0) : t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$$

jest krótsza od każdej krzywej $b = \{b(s) = f(x(s), y(s)) : s_0 \leqslant s \leqslant s_1\}$ prowadzącej z punktu $p_0 = f(t_0, u_0^2)$ do $p_1 = f(t_1, u_0^2)$. Innymi słowy: $L(b) \geqslant L(c)$.

Dowód.

$$\begin{aligned} L(b) = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{(x'(s))^2 + g_{22}(x(s), y(s)) y'(s)^2}\, ds &\geqslant \int_{s_0}^{s_1} |x'(s)|\, ds \\ &\geqslant x(s_1) - x(s_0) = t_1 - t_0 = L(c). \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.6.22 (Levi–Civita)**.** *Niech U, $c = \partial S$, będą kolejno mapą na powierzchni M, obszarem i jego brzegiem, przy czym $c\colon I = [0, \alpha] \to M$ jest parametryzacją ∂S. Niech $p \in \partial S$, oraz niech c jest krzywą gładką, zamkniętą. Niech $\rho(0) \in T_pM$ takie, że $|\rho(0)| = 1$, oraz $\rho(t) = \zeta_t(\rho(0))$ będzie przesunięciem po równoległym polu wektorowym wzdłuż c. Jeśli c leży w U i ogranicza obszar homeomorficzny kołu, to kąt pomiędzy $\rho(0)$ a $\rho(\alpha)$ jest równy: $\iint_S K ds$.*

Definicja 2.6.23 (krzywizna geodezyjna)**.** Niech M powierzchnia, c krzywa na M, oraz niech $e_1(t), e_2(t)$ pola wektorowe wyznaczające reper Freneta wzdłuż c. Wtedy krzywizną geodezyjną w punkcie $c(t)$ nazywamy liczbę:

$$k_g(t) = \langle \frac{De_1}{dt}(t), e_2(t) \rangle,$$

gdzie iloczyn skalarny liczony jest zgodnie z metryką Riemanna w punkcie $c(t)$.

2.6.3 Dowód twierdzenia Gaussa–Bonneta

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia Gaussa–Bonneta. Udowodnimy je w nieco ogólniejszej postaci niż ta, która została podana wcześniej, a mianowicie:

Twierdzenie 2.6.24 (Gaussa–Bonneta, 1848)**.** *Niech M powierzchnia, F wielokąt geodezyjny ograniczający obszar w M, α_i kąty zewnętrzne F, $P\colon F \to M$ pewne odwzorowanie. Wtedy:*

$$\iint_P K \; dM + \int_{\partial P} k_g dt + \sum_j \alpha_j = 2\pi.$$

Zanim rozpoczniemy dowód, wprowadzimy kilka oznaczeń i wyprowadzimy kilka dodatkowych faktów. Zakładamy, że w M mamy współrzędne geodezyjne (x, y), macierz pierwszej formy kwadratowej ma postać: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix}$, oraz:

$$E_1 = \frac{\partial}{\partial x} \quad E_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Lemat 2.6.25. *Jeśli $c\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jest krzywą regulrną, oraz $e_1(t), e_2(t)$ stanowią układ Freneta dla tej krzywej, to istnieje funkcja $\theta\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, taka, że:*

$$e_1(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t)),$$

oraz różnica $\theta(b) - \theta(a)$ nie zależy od wyboru θ.

Dowód. Podzielmy przedział $[a, b]$ na podprzedziały:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$$

tak, że $e_1|_{[t_{k-1}, t_k]} \subset S^1$. Jest to możliwe ponieważ $e_1(t)$ ciągła. Niech $\theta(a)$ będzie takie, że $e_1(a) = (\cos\theta(a), \sin\theta(a))$. Z ciągłości $e_1(t)$ możemy określić θ na $[t_0, t_1]$. Następnie poprzez indukcję możemy rozszerzać θ na kolejnych przedziałach $[t_{j-1}, t_j]$, korzystając wciąż z ciągłości.

Przypuśćmy, że mamy dwa odwzorowania θ i ϕ spełniające warunki lematu. Wtedy $\phi(t) - \theta(t) = 2\pi k(t)$, gdzie $k(t) \in \mathbb{Z}$ i k funkcja ciągła, co jest możliwe tylko, gdy k stała. Stąd $\phi(a) - \theta(a) = \phi(b) - \theta(b)$, co daje natychmiast, że:

$$\theta(b) - \theta(a) = \phi(b) - \phi(a).$$

□

Z powyższego lematu i definicji E_i wynika:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= \cos\theta(t)E_1 + \sin\theta(t)E_2 \\ e_2(t) &= -\sin\theta(t)E_1 + \cos\theta(t)E_2 \end{aligned}$$

Lemat 2.6.26. *Przy powyższych oznaczeniach i założeniach, zachodzi wzór:*

$$k_g(t) = \dot{\theta}(t) + \sqrt{g}_1\dot{y}^2(t)$$

Dowód. Wiadomo, że: $\langle E_i, E_k\rangle = \delta_{ik}$. Różniczkując tą równość i stosując twierdzenie 2.6.14, otrzymujemy:

$$\langle\frac{DE_i}{dt}, E_k\rangle + \langle E_i, \frac{DE_k}{dt}\rangle = 0,$$

co oznacza, że w szczególności jest spełnione: $\langle\frac{DE_i}{dt}, E_k\rangle = -\langle\frac{DE_k}{dt}, E_i\rangle$.

Z poprzedniego lematu oraz twierdzenia 2.6.14, mamy:

$$\frac{De_1}{dt} = \frac{D(\cos\theta(t)E_1 + \sin\theta(t)E_2)}{dt} = \frac{D(\cos\theta(t)E_1)}{dt} + \frac{D(\sin\theta(t)E_2)}{dt}$$

$$= -\sin\theta(t)E_1\dot{\theta}(t) + \cos\theta(t)\frac{DE_1}{dt} + \cos\theta(t)E_2\dot{\theta}(t) + \sin\theta(t)\frac{DE_2}{dt}$$

Wykorzystując powższe zależności wyliczymy teraz k_g zgodnie z definicją:

$$\langle\frac{De_1}{dt}, e_2\rangle = \langle\dot{\theta}(t)(-\sin\theta(t)E_1 + \cos\theta(t)E_2), e_2\rangle + \langle\cos\theta(t)\frac{DE_1}{dt} + \sin\theta(t)\frac{DE_2}{dt}, e_2\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \dot{\theta}(t) - \cos\theta(t)\sin\theta(t)\langle E_1, \frac{DE_1}{dt}\rangle + \cos^2\theta(t)\langle\frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle \\ &\quad - \sin^2\theta(t)\langle\frac{DE_2}{dt}, E_1\rangle + \sin\theta(t)\cos\theta(t)\langle\frac{DE_2}{dt}, E_2\rangle \\ &= \dot{\theta}(t) + \cos^2\theta(t)\langle\frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle - \sin^2\theta(t)\langle\frac{DE_2}{dt}, E_1\rangle \\ &= \dot{\theta}(t) + (\cos^2\theta(t) + \sin^2\theta(t))\langle\frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle \\ &= \dot{\theta}(t) + \langle\frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle = \dot{\theta}(t) + \sqrt{g}_1\dot{y}^2(t) \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 2.6.27 (o dywergencji)**.** *Niech M zorientowana powierzchnia z metryką Riemanna, X pole wektorowe na M, F wielokąt w M, $P\colon F \to M$. Wtedy:*

$$\iint_P (\operatorname{div} X)\ dM = \int_{\partial P} i_X\ dM,$$

gdzie: $X = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$, $\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\sqrt{g}\xi^i$, $i_x\ dM = -\xi^2\sqrt{g}dx^1 + \xi^1\sqrt{g}dx^2$.

Dowód twierdzenia Gaussa–Bonneta. Wcześniej pokazaliśmy, że:

$$K = \frac{R_{1212}}{\det[g_{ij}]} = \frac{-\sqrt{g}_{11}}{\sqrt{g}}$$

Niech $X = \frac{-\sqrt{g}_1}{\sqrt{g}} e_1$, wtedy mamy dalej:

$$K = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{g} \frac{-\sqrt{g}_1}{\sqrt{g}} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot 0 \right) = \operatorname{div} X.$$

Z twierdzenia o dywergencji ($\xi^2 = 0$), mamy:

$$\iint_p K \; dM = \int_{\partial P} \sqrt{g} \xi^1 dx^2 - \sqrt{g} \xi^2 dx^1 = - \int_{\partial P} \sqrt{g}_1 dx^2.$$

Zakładamy, że możemy łukowo sparametryzować i dodatnio zorientować brzeg ∂P. Niech $u(t) = (u^1(t), u^2(t))$ będzie taką właśnie parametryzacją. Niech $I_j = [a_j, b_j]$ będzie podziałem dziedziny powyższej parametryzacji takim, że parametryzacja ta jest gładka na każdym z tych odcinków. Z lematu 2.6.26 mamy:

$$- \int_{\partial P} \sqrt{g}_1 dx^2 = \sum_j \left(\int_{I_j} \dot{\theta}(t) dt - \int_{I_j} k_g(t) dt \right).$$

Lemat 2.6.28.

$$\sum_j \int_{I_j} \dot{\theta}(t) dt + \sum_j \alpha_j = 2\pi$$

Lemat podajemy bez dowodu. Mamy teraz:

$$\iint_P K \; dM = - \int_{\partial P} \sqrt{g}_1 dx^2 = \sum_j \left(\int_{I_j} \dot{\theta}(t) dt - \int_{I_j} k_g(t) dt \right).$$

No a stąd dostajemy:

$$\iint_P K \; dM + \sum_j \int_{I_j} k_g(t) \; dt = 2\pi - \sum_j \alpha_j,$$

co natychmiast daje tezę twierdzenia. □

Bibliografia

Większość tekstu została napisana w oparciu o notatki z wykładu dr. hab. Andrzeja Szczepńskiego, prof. UG, który odbywał się w semestrze letnim roku akademickiego 2006/2007 na Uniwersytecie Gdańskim. Dodatkowo, niektóre fragmenty zostały rozbudowane na podstawie poniższych źródeł.

1. M. Sadowski – *Geometria różniczkowa*, Gdańsk, 1998.

2. W. Klingenberg – *A course in differential geometry*, Nowy Jork, 1978.

3. J. Oprea – *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, Warszawa 2002.

W internecie można też znaleźć inne opracowania wykładów z Geometrii Różniczkowej z różnych uczelni. Poniżej zebrano najciekawszych z nich. Wszystkie podane odnośniki działały poprawnie dnia 14 czerwca 2007.

1. A. Altland – *Differential Geometry*
   `http://www.thp.uni-koeln.de/alexal/PDF_DOCUMENTS/diff_geo.pdf`

2. A. Białynicki-Birula – *Geometria różniczkowa II*
   `http://www.mimuw.edu.pl/~bbirula/matdyd/g_roz99_00/wyk1.pdf`

3. B. Csikós – *Differential Geometry*
   `http://www.cs.elte.hu/geometry/csikos/dif/dif.html`

4. P. Michor – *Topics in Differential Geometry*
   `http://www.mat.univie.ac.at/~michor/dgbook.pdf`

5. R. Sharipov – *Course of differential geometry, The Textbook*
   `http://babbage.sissa.it/PS_cache/math/pdf/0412/0412421v1.pdf`

6. P. Walczak – *Geometria różniczkowa 2*
   `http://math.uni.lodz.pl/~pawelwal/Difgeo.pdf`

7. P. Walczak – *Wstęp do Geometrii Różniczkowej*
   `http://math.uni.lodz.pl/~pawelwal/Dg-wstep.pdf`

8. G. Weinstein – *Elementary Differential Geometry: Lecture Notes*
   `http://www.math.uab.edu/weinstei/notes/dg.pdf`

9. S. Yakovenko – *Lecture notes for the course in Differential Geometry*
`http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~yakov/Geometry/`

10. D. Zaitsev – *Diffential Geometry: Lecture Notes*
`http://www.maths.tcd.ie/~zaitsev/ln.pdf`