Algebra liniowa z geometrią

Krzysztof Tartas Witold Bołt

19 czerwca 2004 roku

1 Wykład

1.1 Pojęcie grupy

Definicja 1.1 (grupa). Zbiór G wraz z działaniem dwuargumentowym $\circ\colon G \times G \to G$ nazywamy grupą o ile działanie $\circ$ spełnia następujące warunki:

1. Łączność:
$$\forall_{g_1,g_2,g_3 \in G} \quad g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3.$$
2. Istnieje element $e \in G$ (neutralny) taki, że:
$$\forall_{g \in G} \quad g \circ e = e \circ g = g.$$
3. Dla każdego elementu istnieje element "odwrotny":
$$\forall_{g \in G} \exists_{g' \in G} \quad g \circ g' = g' \circ g = e.$$

Przykład 1.2. Oto proste przykłady grup.

A. $(\mathbb{R}^2, +)$ - wektory w przestrzeni dwu-wymiarowej z dodwaniem (przykład dość oczywisty).

1. W oczywisty sposób zachodzi łączność:
$$\forall_{v_1,v_2,v_3} v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3.$$
2. Isteniej wektor zerowy (0,0) = 0, który jest elementem neutralnym dodwania ($v+0 = v$).
3. $\forall_{v \in \mathbb{R}^2} \quad v + (-v) = 0$

B. $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, \cdot)$ - liczby rzeczywiste bez zera z mnożeniem.

1. Łączność: $\forall_{a,b,c} \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$
2. Istnieje 1 - element neutralny ($\forall_{x \in \mathbb{R}} 1 \cdot x = x$).
3. Element odwrotny: $z^{-1} \cdot z = 1$ istnieje dla każdej liczby rzeczywistej poza zerem, dlatego właśnie rozpatrujemy tu liczby rzeczywiste bez zera.

Uwaga 1.3 (grupa przemienna). Grupę w, której $\forall_{g_1,g_2 \in G} \quad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ nazywa się przemienną, lub abelową. Grupy występujące w powyższym przykładzie oczywiście są przemienne.

1.2 Pojęcie ciała

Definicja 1.4 (ciało). Ciałem K będziemy nazywali dowolny zbiór na którym zdefiniowaliśmy dwa działania: dodowanie $+\colon K \times K \to K$, oraz mnożenie $\cdot\colon K \times K \to K$, spełniające następujące warunki:

1. $(K, +)$ jest grupą abelową z elementem neutralnym 0,
2. $(K\backslash\{0\}, \cdot)$ jest grupą abelową z elementem neutralnym 1,
3. $0 \neq 1$ (co wbrew pozorom nie jest oczywiste - i jest ważne!),
4. $\forall_{a,b,c\in K} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ - czyli rozdzielność dodwania względem mnożenia.

Definicja 1.5 (podciało). Podciało to podzbiór danego ciała zawierąjacy 0 i 1, posiadający własności danego ciała. Podciało samo jest ciałem.

Przykład 1.6 (ciała). Przykłady ciał:

1. Ciało 2-elementowe $\mathbb{Z}_2$ liczba całkowita modulo 2, ze zdefiniowanymi działaniami:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

2. Ciało p-elementowe: $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \ldots, p - 1\}$ - działania podobnie jak wyżej.
3. Liczby rzeczywiste: $\mathbb{R}$ z "normalnym" dodawaniem i mnożeniem to ciało. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to przykład podciała liczby rzeczywistych.
4. Natomiast liczby całkowie $\mathbb{Z}$ to przykład zbioru, który nie jest ciałem - ze względu na to, że nie ma tam elementów odwrotnych w mnożeniu.

1.3 Liczby zespolone

Definicja 1.7 (ciało algebraiczne domknięte). Ciałem algebraicznym domkniętym nazywamy takie ciało, w którym wszystkie wielomiany o współczynnikach z tego ciała, mają przynajmniej jeden pierwiastek.

Przykład 1.8 (liczby zespolone). Jednym z najważniejszych przykładów ciał algebraicznych domkniętych, są liczby zespolone, które oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Historycznie powstały właśnie dlatego, aby rozwiązać problem wielomianów, które w liczbach rzeczywistych nie mają pierwiastków (a w zespolonych mają). Poniżej przedstawiono podstawowe własności i fakty odnośnie liczb zespolonych.

Podstawowe własności liczb zespolonych.

- Liczby rzeczywiste zawierają się w liczbach zespolonych: $\mathbb{C} \supset \mathbb{R}$.
- Każda liczba zespolona $z \in \mathbb{C}$ jest postaci: $z = x_1 + x_2 \cdot i$, gdzie: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, i = (0, 1)$, co w skrócie możemy zapisać: $z = (x_1, x_2)$. Liczbę x_1 nazywamy częścią rzeczywistą liczby zespolonej i oznaczamy przez Rez. Liczbę i nazywamy liczbą urojoną, zachodzi dla niej: $i^2 = -1$. Liczbę x_2 nazywamy częścią urojoną liczby zespolonej i oznaczamy przez Imz.
- Definiuje się operację sprzężenia. Niech $z \in \mathbb{C}$ i $z = x_1 + x_2 i$ wtedy liczbę postaci $\overline{z} = x_1 - x_2 i$ nazywamy sprzężeniem liczby z.
- Definiuje się operację modułu. Moduł z liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$ oznaczamy przez $|z|$. Moduł jest liczbą rzeczywistą i przyjmuje wartość $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Własności sprzężenia ("kreski").

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $|z| = |\overline{z}|$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z \cdot \overline{z} = (x_1 + x_2 i)(x_1 - x_2 i) = x_1^2 + x_2^2 = |z|^2$, a co z tym idzie $|z \cdot \overline{z}| = |z|^2$.

Własności modułu.

- $\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
- $|(|z|)| = |z|$
- $|z_1||z_2| = |z_1 z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Postać tyrgonometryczna liczby zespolonej Każdą liczbę zespoloną z możemy również przedstawić w postaci sumy funkcji trygonomterycznych sin oraz cos liczonych dla wartości φ zwanej argumentem liczby zespolonej z ($\varphi = argz$). Przedstawienie takie ma postać:

$$z = |z|(cos\varphi + isin\varphi)$$
$$\cos\varphi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \qquad \sin\varphi = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Przykład 1.9. Stosując zapis trygonometryczny mamy:

a) $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $argi = \frac{\pi}{2}$,

b) $z = (1, \sqrt{3})$, wtedy $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 1 + i\sqrt{3}$, $argz = \frac{\pi}{3}$.

Stwierdzenie 1.10 (o iloczynie i ilorazie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej). *Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy iloczyn tych liczb ma postać:*

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Natomiast ich iloraz wyraża wzór (przy założeniu, że $z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

2 Wykład

2.1 Liczby zespolone - ciąg dalszy

Stwierdzenie 2.1 (wzór na argument iloczynu liczb zespolonych). *Niech $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ będą argumentami liczb zespolonych $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Wówczas argument liczby zespolonej $z = z_1 z_2 \ldots z_k$ ma postać $argz = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k$.*

Wniosek: wzór de' Moivre'a. Niech $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, gdzie $r \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Twierdzenie 2.2 (wzór Eulera). *Zachodzi wzór:* $e^{i\varphi} = cos\varphi + isin\varphi$. *Daje nam to* ***wykładnicze przedstawienie liczby zespolonej****, które ma postać:* $z = |z|e^{i\varphi}$, *gdzie* $\varphi = argz$.

Uwaga 2.3. Twierdzenie wzór Eulera dla liczb zespolonych pomaga przy dowodzeniu twierdzeń odnośnie trygonometrycznego przedstawienia liczby zespolonej.

2.2 Przestrzenie wektorowe

Definicja 2.4 (przestrzeń liniowa). Niech będzie dane ciało K i zbiór wektorów V spełniające następujące warunki:

1. Istnieje działanie dodwania $+\colon V \times V \to V$ spełniające aksjomaty:
   - dodwanie jest łączne:
     $$\forall_{v_1,v_2,v_3 \in V} \qquad (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3),$$
   - istnieje element neutralny dodwania zwany zerem:
     $$\exists_{0 \in V} \forall_{v \in V} \qquad 0 + v = v + 0 = v,$$
   - istnieje element przeciwny:
     $$\forall_{v \in V} \exists_{v_1 \in V} \qquad v + v_1 = v_1 + v = 0.$$
2. Istnieje działanie mnożenia $\cdot\colon K \times V \to V$ spełniające aksjomaty:
   - rozdzielność dodawania względem mnożenia przez sklara:
     $$\forall_{\alpha \in k} \forall_{v_1,v_2 \in V} \qquad \alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2,$$
   - rozdzielość dodawania skalarów względem mnożenia przez wektor:
     $$\forall_{\alpha_1,\alpha_2 \in k} \forall_{v \in V} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v,$$
   - zachodzi:
     $$\forall_{\alpha,\beta \in k} \forall_{v \in V} \qquad \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v,$$
   - istnieje 1 - element neutralny mnożenia:
     $$\forall_{v \in V} \qquad 1 \cdot v = v.$$

Wówczas zbiór V będziemy nazywali przestrzenią liniową (wektorową) nad ciałem K.

Wyrażenie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$ będziemy nazywać kombinacją liniową wektorów (elementów) $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Definicja 2.5 (układu wektorów niezależnych liniowo). Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Niech $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Wektory $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazywamy liniowo niezależnymi wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego układu skalarów $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k)$ równanie $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$ ma tylko zerowe rozwiązanie (tzn. że jedynym rozwiązaniem jest $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$). Innymi słowy układ wektorów jest liniowo niezależny wtedy i tylko wtedy, gdy jego dowolona kombinacja liniowa równa jest zeru tylko w przypadku, gdy wszystkie skalary równe są zeru.

Definicja 2.6 (układ wektorów liniowo zależnych). Wektory które nie są liniowo niezależne nazywamy liniowo zależnymi.

3 Wykład

3.1 Przestrzenie wektorowe - ciąg dalszy

Przykład 3.1 (układy wektorów liniowo niezależnych). Poniższe układy wektorów są liniowo niezależne.

1. $(0,1),(1,0)$
2. $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$
3. Układ standardowy wektorów niezależnych w $\mathbb{R}^n$
$e_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$
$e_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$
$\vdots$
$e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ - 1 na i-tej pozycji,
$\vdots$
$e_n = (0,0,0,\dots,0,1)$

Przykład 3.2 (układy wektorów liniowo zależnych). Poniższe układy wektorów są liniowo zależne.

1. $(0,1),(1,0),(1,1)$
2. $(0,1,0),(0,2,0),(1,0,0)$
3. $(0,0),(2,0),(0,3)$

Uwaga 3.3 (układ wektorów zawierający wektor zerowy). Dowolny układ skończony wektorów zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny. Ponieważ przy $x_i = 0$ dowolna kombinacja liniowa z $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1} = 0$ z dowolnym α_i jest zerowa.

Definicja 3.4 (zbiór generatorów przestrzeni liniowej). Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Mówimy, że układ punktów w przestrzeni V, $\{y_i\}_{i\in I} \subset V$ jest jej zbiorem generatorów o ile dowolny $z \in V$ jest skończoną kombinacją wektorów ze zbioru $\{y_i\}_{i\in I}$. Co dokładnie znaczy, że istnieje skończona liczba $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{ik}$ elementów zbioru $\{y_i\}_{i\in I}$ taka, że $z = \alpha_1 y_{i1} + \dots + \alpha_k y_{ik}$. Jeżeli zbiór I jest skończony to mówimy, że przestrzeń V jest skończenie generowana.

Przykład 3.5 (zbiory generatorów). Przestzeń $\mathbb{R}^2$ może być generowana przez dwa wektory - na przykład takie: $v_1 = (1,0)$ oraz $v_2 = (0,1)$. Równie dobrze, zbiór generatorów może być większy - i zawierać na przykład 3 elementy: $v_1 = (1,0)$, $v_2 = (0,1)$, $v_3 = (1,1)$.

Uwaga 3.6. Jeżeli $\{y_i\}_{i\in I}$ jest zbiorem generatorów przestrzeni V, to dowolny zbiór punktów zawierający zbiór punktów $\{y_i\}_{i\in I}$ jako swój podzbiór jest również zbiorem generatorów przestrzeni V.

Definicja 3.7 (podprzestrzeń liniowa). Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K. Podzbiór $V_1 \subset V$ będziemy nazywali podprzestrzenią liniową o ile:

1. $0 \in V_1$,
2. $\forall_{x_1,x_2\in V_1} \quad x_1 + x_2 \in V_1$,
3. $\forall_{\alpha\in K}\forall_{x\in V_1} \quad \alpha x \in V_1$.

Stwierdzenie 3.8. *$V_1 \subset V$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej V nad ciałem K wtedy i tylko wtedy, gdy:*

$$\forall_{\alpha,\beta\in K}\forall_{x,y\in V_1} \quad \alpha x + \beta y \in V_1.$$

Stwierdzenie 3.9. *Niech V oznacza przestrzeń liniową nad ciałem K, a $X \subset V$ dowolny zbiór punktów. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych postaci: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ dla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in k$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ i n dędącego liczbą naturalną jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.*

Definicja 3.10 (baza przestrzeni liniowej). Liniowo niezależny zbiór generatorów nazywamy bazą przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

Uwaga 3.11. Nieskończony zbiór elementów V nazywamy liniowo niezależnym o ile każdy skończony jego podzbiór jest liniowo niezależny.

Przykład 3.12 (nieskończony zbiór elementów liniowo niezależnych). Korzystając z przykładu 3.1.3 można łatwo stowrzyć nieskończenie wymiarową przestrzeń liniową nad ciałem $\mathbb{R}$ i pokazać nieskończony zbiór wektorów liniowo niezależnych. Występującymi w praktyce przestrzeniami nieskończenie generowanymi są na przykład przesteń wszystkich funkcji, lub chociażby funkcji o danych własnościach - wielomianów dowolnego stopnia ze współczynnikami w danym ciele (nieskończonym). W dalszej części rozważań zazwyczaj zakładamy, że rozpatrywana przestrzeń jest skończenie generowana.

Stwierdzenie 3.13. *Maksymalny podzbiór wektorów liniowo niezależnych w przestrzeni liniowej V nad ciałem K jest jej bazą (maksymalny oznacza maksymalny ze względu na relację zawierania zbiorów).*

Stwierdzenie 3.14. *V - przestrzeń liniowa nad ciałem K, $X \in V$ - baza. Każdy wektor $z \in V$ jest jednoznacznie zapisywalny jako kombinacja liniowa elementów X.*

$$z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_1 x_n, \qquad \text{gdzie} \quad \forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \quad x_i \in X, \alpha_i \in K.$$

4 Wykład

4.1 Przestrzenie liniowe - ciąg dalszy

Twierdzenie 4.1. *Niech V przestrzeń wektorowa nad ciałem K. Niech $V \neq 0$, oraz niech $\gamma \subset V$ - zbiór generatorów przestrzeni V. $S \subset \gamma$ - liniowo niezależny podzbiór γ. Wówczas w V istnieje baza B taka, że: $S \subset B \subset \gamma$.*

Wniosek: Jeżeli $V \neq 0$ to każdy zbiór liniowo niezależnych wektorów można rozszerzyć do bazy.

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jest bazą przestrzeni V nad ciałem K to dowolna inna baza ma również m elementów.*

Definicja 4.3 (wymiar przestrzeni liniowej). Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K. Przypuśćmy, że V posiada bazę n-elementową. Wówczas będziemy mówili, że wymiar przestrzeni liniowej V nad ciałem K wynosi $n = \dim_K V$. Jeżeli V nie ma bazy skończonej to V jest nieskończenie wymiarowa ($\dim_K V = \infty$).

Przykład 4.4. Rozpatrzmy następujące sytuacje:

1. Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ nad ciałem liczb rzeczywistych może mieć bazę $S = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$. Wymiar $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$ - czyli każda inna baza tej przestrzeni również będzie miała 2 elementy.
2. Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ może być również przestrzenią liniową nad ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Wówczas bazą jest zbiór nieskończony, czyli $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}^2 = \infty$.
3. Przestrzeń wielomianów stopnia $\leqslant n$ o współczynnikach w $\mathbb{R}$, którą oznaczamy $[\mathbb{R}]_n$, może mieć bazę $S = \{1 = x^0, x, x^2, \ldots, x^n\}$. Wymiar tej przestrzeni wynosi: $\dim [\mathbb{R}]_n = n + 1$.

5 Wykład

5.1 Przekształcenia i odwzorowania

Definicja 5.1 (homomorfizm). Niech V_1 i V_2 będą skończenie wymiarowymi przestrzeniami liniowymi nad ciałem K. Odwzorowanie $f : V_1 \to V_2$ będziemy nazywali homomorfizmem z przestrzeni liniowej V_1 do przestrzeni liniowej V_2 o ile spełniony jest warunk:

$$\forall_{x_1,y_1\in V_1}\forall_{\alpha,\beta\in k} \quad f(\alpha x_1 + \beta y_1) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2).$$

Stwierdzenie 5.2. *$f : V_1 \to V_2$ jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. $\forall_{x,y\in V_1} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall_{\alpha\in k}\forall_{x\in V_1} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Uwaga 5.3. Z powyższych faktów mamy, że:

- Homomorfizmy zachowują dodawanie i mnożenie przez skalary.
- Jeśli f - homomorfizm, to: $f(0) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0$.

Definicja 5.4 (jądro i obraz homomorfizmu). Niech $f : V_1 \to V_2$ będzie homomorfizmem skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem K. Zbiór $\ker f = \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$ nazywamy jądrem homomorficznym f. Zbiór $Imf = \{y \in V_2 | \exists_{x\in V_1} \quad f(x) = y\}$ nazywamy obrazem homomorfizmu f.

Uwaga 5.5. Jądro $\ker f$ jest przeciwobrazem zera.

Stwierdzenie 5.6. *Obraz i jądro są podprzestrzeniami liniowymi odpowiednio V_2 i V_1*

Definicja 5.7 (izomorfizm i endomorfizm). Wyróżniamy specjalne przypadki przekształceń liniowych, które mają swoje nazwy własne:

- izomorfizm - jest to taki homomorfizm który jest jest różnowartościowy i "na",
- endomorfizm - jest to homomorfizm działający z danej przestrzeni w tą samą przestrzeń, na przykład: $f\colon V \to V$.

Definicja 5.8. V_1 i V_2 - skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe nad ciałem K
$e_1, e_2, \dots, e_n$ - baza przestrzeni V_1
$f_1, f_2, \dots, f_m$ - baza przestrzeni V_2
$f : V_1 \to V_2$ - homomorfizm przestrzeni liniowych. $f(e_i \in)V_2$
$\forall_{x\in V_1} \quad x = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n$
$f(x) = f(\gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \dots + \gamma_n e_n) = \gamma_1 f(e_1) + \gamma_2 f(e_2) + \dots + \gamma_n f(e_n)$

$$(*) = \begin{cases} f(e_1) = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + \dots + \alpha_{m1} f_m \\ f(e_2) = \alpha_{12} f_1 + \alpha_{22} f_2 + \dots + \alpha_{m2} f_m \\ \vdots \\ f(e_i) = \alpha_{1i} f_1 + \alpha_{2i} f_2 + \dots + \alpha_{mi} f_m \\ \vdots \\ f(e_n) = \alpha_{1n} f_1 + \alpha_{2n} f_n + \dots + \alpha_{nm} f_m \end{cases}$$

Definicja 5.9. Macierzą homomorfizmu f nazywamy tablicę $[\alpha_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ elementów $\alpha_{ij} \in k$ utwożoną z wzorów (*).

Uwaga 5.10. Ogólnie macierzą o współczynnikach w ciele K nazywamy dowolny prostokąt $(n \times m)$ liczb. W zapisie: α_{ij} liczba i oznacza numer wiersza, a liczba j numer kolumny.

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2i} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mi} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Przykład 5.11. Pokażemy teraz jak przedstawiać przekształcenia w formie macierzy.

1. Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $\quad f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z)$. Bazą przestrzeni $\mathbb{R}^3$ będzie $S_1 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ a bazą $\mathbb{R}^2$ niech będzie $S_2 = \{f_1 = (1,0), f_2 = (0,1)\}$. Policzmy wartości przekształcenia dla wektorów bazy S_1 i przedstawmy je w postaci kombinacji liniowych wektrów z S_2:

$$f(e_1) = (1,1) = 1f_1 + 1f_2$$
$$f(e_2) = (1,-1) = 1f_1 - 1f_2$$
$$f(e_3) = (1,1) = 1f_1 + 1f_2 4$$

   Wyniki te możemy wpisać w macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Rozpatrzmy teraz sytuacje odwrotną do tej z przykładu poprzedniego. Załóżmy, że dana jest macierz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

   Przyjmujemy bazy takie jak w przykładzie poprzednim. Z macierzy odczytujemy wartości przekszt łacenia, dla wektorów bazowych:

$$f(e_1) = 1f_1 + 4f_2 = (1,4),$$
$$f(e_2) = 2f_1 + 5f_2 = (2,5),$$
$$f(e_3) = 3f_1 + 6f_2 = (3,6).$$

   W ten sposób możemy zapisać wzór przekszt łacenia:

$$f(x,y,z) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(1,4) + y(2,5) + z(3,6) = (x+2y+3z, 4x+5y+6z).$$

5.2 Mnożenie macierzy

Mnożenie macierzy A i B jest możliwe tylko wtedy gdy ilość kolumn macierzy A jest równa ilości wierszy macierzy B. W innych przypadkach mnożenie jest awykonalne.

$$[a_{ij}] \cdot [b_{kl}] = [c_{rs}] \qquad c_{rs} = \sum_{k=1}^{t} a_{rk} b_{ks}$$

Uwaga 5.12. Macierze kwadratowe o tej samej liczbie kolumn zawsze można mnożyć.

Uwaga 5.13. Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

6 Wykład

6.1 Związek macierzy z homomorfizmem

Stwierdzenie 6.1 (o składaniu homomorfizmów). *Niech V_1, V_2, V_3 - przestrzenie liniowe skończenie wymiarowe nad ciałem K, o bazach: $V_1 = e_1, e_2, \ldots, e_n, V_2 = f_1, f_2, \ldots, f_m, V_3 = g_1, g_2, \ldots, g_j$. Niech $[\alpha_{ij}]$ będzie macierzą homomorfizmu $f_1 : V_1 \to V_2$, a $[\beta_{ij}]$ macierzą homomorfizmu $f_2 : V_2 \to V_3$. Wówczas macierz superpozycji (złożenia) $f_1 \circ f_2 : V_1 \to V_3$ jest postaci: $[\alpha_{ij}][\beta_{ij}]$. Innymi słowy możemy utożsamić mnożenie macierze ze składaniem homomorfizmów.*

Definicja 6.2 (macierz odwrotna). Macierz kwadratowa A nazywa się odwracalną o ile istnieje macierz kwadratowa B o własności:

$$AB = BA = id = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz odwrotną oznaczamy przez A^{-1}.

Wniosek: Każda macierz $id_B^{B'}$ jest odwracalna.

Twierdzenie 6.3. *Niech V, V_1 - przestrzenie liniowe skończenie wymiarowe nad ciałem K, o wymiarach $dim\,_kV = n$, $dim\,_kV_1 = m$. Zbiór wszystkich homomorfizmów (odwzorowań lniowych) $V \to V_1$ jest tożsamy ze zbiorem macierzy $(m \times n)$ o współczynnikach w ciele K. Zbiór ten oznaczamy często przez $Mat_{n\times m}(K)$ lub $Mat_n^m(K)$ (a jeśli $n = m$ to piszemy także $Mat_n(K)$ lub $M(n, K)$).*

Uwaga 6.4. Jeśli przekształcenie ma macierz A która jest odwracalna, to mówimy, że przekształcenie to jest odwracalne. Jeśli przekształcenie jest odrwacalne, to zachowuje bazę. To znaczy jeśli wektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$ są bazą, to również wektory $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ są bazą.

6.2 Wyznacznik macierzy

Definicja 6.5 (wyznacznik macierzy). Niech $Mat_n(K)$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych o n kolumnach, o współczynnikach w ciele K. Wprowadzimy funkcję $\det : Mat_n(K) \to K$, taką, że:

- dla $n = 1$ mamy $\det\,[a] = a \quad \forall_{a\in K}$,
- dla $n = 2$ mamy $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$,
- dla $n > 2$ zachodzi:

  $$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{in} |M_{in}|,$$

  gdzie $|M_{in}| = \det M_{in}$, a M_{in} oznacza macierz powstałą z macierzy M po wykreśleniu i-tego wiersza i n-tej kolumny.

Uwaga 6.6. Bardzo łatwo liczy się wyznacznik macierzy diagonalnych:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn},$$

przy założeniu: $\forall_{i\neq j} a_{ij} = 0$. Powyższy wzór jest prawdziwy także dla macierzy trójkątnych.

7 Wykład

7.1 Liczenie wyznaczników macierzy

Twierdzenie 7.1. *Niech n będzie liczbą naturalną. Załóżmy, że i jest ustaloną liczbą naturalną nie większą niż n, $(a_1, \ldots, a_n, a_i')$ - układem wektorów w przestrzeni K^n oraz α, α' - elementami ciała K. Wówczas:*

$$det(a_1, \ldots, a_{i-1}, \alpha a_i + \alpha' a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n) = \alpha det(a_1, \ldots, a_n) + \alpha' det(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Twierdzenie 7.2. *Niech będą spełnione założenia poprzedniego twierdzenia. Wówczas:*

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \alpha a_i + \alpha' a_i' \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha' det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ a_i' \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Wniosek: Wyznacznik macierzy nie zmieni się o ile do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę.

Twierdzenie 7.3. *Niech n będzie liczbą naturalną większą od 1. Złóżmy, że i, k są liczbami naturalnymi spełniającymi nierówności $1 \leqslant i < k \leqslant n$ i niech $(a_1, \ldots, a_n)$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni K^n. Jeśli $a_i = a_k$, to $det(a_1, \ldots, a_n) = 0$.*

Twierdzenie 7.4. *Niech będą spełnione założenia poprzedniego twierdzenia. Jeśli $a_i = a_k$, to*

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Uwaga 7.5. Jeśli przyjmie się definicję wyznacznika jako formy wieloliniowej alternującej (patrz wykład 15), to powyższe twierdzenia stają się bardzo proste do udowodnienia i są wręcz prostymi wnioskami z definicji.

8 Wykład

8.1 Liczenie wyznaczników - ciąg dalszy

Twierdzenie 8.1 (Laplace'a dla kolumn). *Zachodzi wzór:*

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} a_{il}\ det\ A_{il} \qquad 1 \leqslant l \leqslant n.$$

Definicja 8.2 (macierz transponowana). Niech A będzie macierzą $(m \times n)$ o współczynnikach w ciele K. Macierzą transponowaną do macierzy A nazywamy macierz A^T $(n \times m)$ powstałą przez zamianę w macierzy A wierszy na kolumny.

Twierdzenie 8.3 (o wyznaczniku macierzy transponowanej). *Dla każdej macierzy kwadratowej mamy: $det\ A = \ det\ A^T$.*

Uwaga 8.4. Powyższe twierdzenie pozwala "przerobić" twierdzenia odnośnie kolumn, na twierdzenia odnośnie wierszy (szczególnie przydatne w przypadku tw. Laplace'a).

Twierdzenie 8.5 (Laplace'a dla wierszy). *Dla macierzy kwadratowej M zachodzi wzór:*

$$det\ M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ki}\ det\ M_{ki} \qquad k \in 1, 2, \ldots, n.$$

8.1.1 Liczenie wyznczników - podsumowanie

Z powyższych twierdzeń wynika, iż istnieją operacje niezmieniające wyznacznika macierzy lub takie które zmieniają tylko jego znak. Wypiszemy je raz jeszcze.

1. Transponowanie macierzy nie zmienia wyznacznika.
2. Dodanie do dowolnej kolumny innej kolumny pomnożonej przez skalar nie zmienia wyznacznika.
3. Dodanie do dowolnego wiersza innego wiersza pomnożonego przez skalar nie zmienia wyznacznika.
4. Zamiana miejscami dowolnych dwóch różnych wierszy zmienia znak wyznacznika.
5. Zamiana miejscami dowolnych dwóch różnych wierszy zmienia znak wyznacznika.

Korzystając z tych przekształceń każdą macierz można sprowadzić do postaci diagonalnej - wtedy liczenie wyznacznika jest trywialne.

9 Wykład

9.1 Rząd macierzy

Definicja 9.1 (rząd macierzy). Rzędem macierzy A nazywamy liczbę $\operatorname{rz} A$ równą wymiarowi przestrzeni liniowej rozpiętej na jej wierszach.

Stwierdzenie 9.2. *Niech będzie dana dowolna macierz, wówczas wymiar przestrzeni liniowej rozpiętej na jej wierszach jest równy wymiarowi przestrzeni liniowej rozpiętej na jej kolumnach.*

Uwaga 9.3. Czyli, oczywiście $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^T$.

Przy dowodzeniu powyższego twierdzenia korzysta się z lematu.

Lemat 9.4. Niech M - macierz kwadratowa $(n \times n)$. Wówczas $r(M) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det M \neq 0$.

Definicja 9.5 (minor macierzy). Niech A będzie dowolną macierzą $(m \times n)$. Minorem stopnia (wymiaru) $k \leqslant min(m, n)$ będziemy nazywali wyznacznik z macierzy kwadratowej $(k \times k)$ utworzonej z k wierszy i k kolumn macierzy A.

Uwaga 9.6 (minor główny). Pojęcie minoru macierzy mówi że do minoru mają należeć kolumny i wiersze danej macierzy - jednak nie mówi nic o tym które z nich (i w jakiej kolejności) mają być brane pod uwagę. Użytecznym często pojęciem jest pojęcie tzw. minoru głównego macierzy. Minor główny stopnia k jest to wyznacznik macierzy kwadratowej $k \times k$ utworzonej z pierwszych k wierszy i kolumn danej macierzy. Czyli jeśli mamy macierz $A = [a_{ij}]_{1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m}$ to minor główny stopnia 1, to a_{11}, minor główny stopnia 2, to: $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ itd.

Wniosek: Rząd macierzy A jest stopniem (wymiarem) jej największego niezerowego minoru.

10 Wykład

10.1 Układy równań

Definicja 10.1. Przez układ równań będziemy rozumieli:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Definicja 10.2 (macierz główna i rozszerzona układu równań). Przyjmując oznaczenia z powyższej definicji, definiujemy macierze:

$$\underset{\text{macierz główna układu}}{A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{macierz rozszerzona układu}}{B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}}$$

Lemat 10.3. Układ równań z powyższych definicji jest równoważny równaniu macierzowemu: $Ax = b$, gdzie: A - macierz główna układu, oraz:

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Lemat 10.4. Niech $C_1, C_2, \ldots, C_n$ będą macierzami powstałymi z kolejnych kolumn macierzy A i niech $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$, wtedy układ równań jest równoważny równaniu:

$$x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n = b.$$

Wniosek: Układ ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy b jest kombinacją liniową $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

11 Wykład

11.1 Rozwiązywanie układów równań

Komentarz piszącego. Szczegółowy opis metody rozwiązywania układów równań, jaki i wiele innych cennych informacji, można znaleźć w skrypcie dostępnym tutaj: http://math.one.pl w dziale algebra liniowa. Ze względu na ograniczenia czasownie nie udało się tych wszystkich informacji zgromadzić w naszym opracowaniu.

Twierdzenie 11.1 (Kroneckera-Capelli). *Układ równań liniowych:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rządz macierzy głównej równy jest rządowi macierzy rozszerzonej (rz $A =$ rz B).

Twierdzenie 11.2 (Cramera). *Niech A będzie macierzą kwadratową $(n \times n)$ o wyznaczniku różnym od 0. Rozpatrzymy układ równań Ax=b. Wówczas $x_i = \frac{det\ A_i}{det\ A}$, gdzie: A_i jest macierzą powstałą z macierzy A przez zamianę i-tej kolumny przez kolumnę b.*

12 Wykład

Definicja 12.1 (jednorodny układ równań). Układ równań postaci $Ax = 0$, gdzie A jest dowolną macierzą $(m \times n)$, x jest wektorem niewiadomych $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a 0 - wektor zerowy przestrzeni liniowej K^n, nazywamy jednorodnym.

Uwaga 12.2. Niech A będzie macierzą jednorodnego układu równań o rozmiarach $n \times n$. Wtedy taką macierz możemy potraktować również jako macierz przekształcenia liniowego. Załóżmy że rozpatrujemy przestrzenie nad ciałem $\mathbb{R}$. Wtedy $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Zbiorem rozwiązań układu Ax=0 jest $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ czyli innymi słowy jest to jądro przekształcenia $\ker A$. Z tego co mówiliśmy o przekształceniach liniowych wynika, że jądro jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{R}^n$ której wymiar wynosi: $\dim \ \ker A = n - r(A)$.

13 Wykład

Stwierdzenie 13.1. *Zbiór rozwiązń układu równań Ax=b jest zbiorem postaci $x_1 + V$ gdzie x_1 jest dowolnym elementem K^m o własności $Ax_1 = b$, a $V = \{x \in K^m | Ax = 0\}$.*

14 Wykład

14.1 Pojęcie grupy

Uwaga 14.1. Jest to drugi raz kiedy takie pojęcie pojawia się w ramach tego wykładu, dlatego warto porównać materiał z wykładu 1 z tym który jest tutaj.

Definicja 14.2 (grupa). Grupą nazywamy zbiór G wraz z działaniami $\circ$ i $G \times G \to G$ spełniającym trzy warunki:

1. działanie $\circ$ jest łączne: $\forall_{g_1,g_2,g_3 \in G} \qquad g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$,
2. istnieje element neutralny $e \in G$ taki, że: $\forall_{g \in G} \qquad g \circ e = e \circ g = g$,
3. istnieje element odwrotny: $\forall_{g \in G} \exists_{g'} \qquad g \circ g' = g' \circ g = e$.

Uwaga 14.3. W punktach 2 i 3 kwantyfikator $\exists$ tak na prawdę oznacza $\exists$!

Definicja 14.4 (grupa przemienna). Jeżeli działanie $\circ$ ma w grupie własność: $\forall_{g_1,g_2 \in G} \qquad g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ to G nazywamy grupą przemienną lub Abelową (Abel - matematyk norweski).

Uwaga 14.5. Przestrzeń wektorowa jest grupą abelową.

Definicja 14.6 (grupa addytywna). Pierścień P ze zdefiniowanym działaniem dodawania i wyróżnionym elementem neutralnym "zero", nazywamy grupą addytywną pierścienia i oznaczamy P^+.

Definicja 14.7 (grupa multiplikatywna). Elementy odwracalne pierścienia P, ze zdefiniowanym działaniem mnożenia i wyróżnionym elementem neutralnym 1, nazywamy grupą multiplikatywną pierścienia P i oznaczamy przez $P^{\cdot}$.

znowu dość niejasny przykład!

Przykład 14.8. Oto przykłady grup:

Ia. $(\mathbb{R} \backslash \{0\}, 1, \cdot)$ grupa abelowa multiplikatywna.

Ib. $(\mathbb{R}, 0, +)$ grupa abelowa addytywna.

II. Niech $C_n = \{cos\frac{2\pi k}{n} + sin\frac{2\pi k}{n} | k \in N\}$. Tak zdefiniowana zbiór C_n spełnia warunki:

1. jest to zbiór n elementowy,
2. mnożenie tak jak w liczbach zespolonych,
3. $1 \in C_n$,
4. jest to grupa,
5. grupa generowana przez $cos\frac{2\pi}{n} + sin\frac{2\pi}{n}$.

III. $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$ - grupa abelowa +
$n\mathbb{Z} = \{nz | z \in \mathbb{Z}\}$ - grupa +
$a, b \in \mathbb{Z}$ są w relacji (równoważności) wtedy i tylko wtedy, gdy $a - b \in n\mathbb{Z}$
Niech $\mathbb{Z}_n$ =zbiór klas abstrakcji relacji .
$\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \dots, [n-1]\}$
$\mathbb{Z}_n = n \qquad \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$
$[n_1], [n_2] \to [n_1 + n_2]$

Definicja 14.9 (grupa cykliczna). Grupa nazywa się cykliczną o ile zawiera element o własności, że każdy inny element tego zbioru jest jego sumą (produktem). Przykładem grupy cyklicznej jest grupa $\mathbb{Z}_n$.

Stwierdzenie 14.10. *Każda grupa cykliczna jest postaci przykładu II lub III (patrz wyżej).*

14.2 Przekształcenia grup

Definicja 14.11 (homomorfizm grup). Homomorfizmem grup G_1 i G_2 nazywamy odwzorowanie $h\colon G_1 \to G_2$ o wyrazach $\forall_{g_1, g_1' \in G_1} \quad h(g_1 g_1') = h(g_1) h(g_1')$.

Uwaga 14.12. Wcześniej pojawiał się już definicja homomorfizmu przestrzeni liniowych.

Definicja 14.13 (izomorfizm grup). Izomorfizm jest to homomorfizm "1-1" i "na". Dwie grupy są ze sobą izomorficzne jeśli istnieje izomorfizm z jednej grupy w drugą.

Wniosek: Każda grupa cykliczna o n elementch jest izomorfizmem z $\mathbb{Z}_n$. Każda nieskończona grupa cykliczna jest izomorfizmem z grupą $\mathbb{Z}$.

Uwaga 14.14. Więcej (i jaśniej) o grupach cyklicznych w książce Andrzej Białnicki-Birula, "Algebra", strona 228 i 243.

kolejny przykład do poprawienia

Przykład 14.15. Niech $x_n = \{1, 2, \dots, n\}$ będzie zbiorem n-elementowym.
Oznaczmy przez $S_n = \{f : x_n \to x_n |\text{funkcja f jest "na"}\}$. Niech $\cdot$ oznacza złożenie odwzorowań. Wówczas S_n z tym działaniem jest grupą. Elementem neutralnym jest identyczność. S_n -grupa permutacji n-elementów.
$G \in S_n$
$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ G(1) & G(2) & \dots & G(n) \end{pmatrix}$
Cyklem $(k_1, k_2, \dots, k_n) \in S_n$ nazywamy permutację o własności $k_1 \to k_2 \to \dots \to k_{l-1} \to k_l \to 1$.Pozostałe elementy przechodzą na siebie. Każda permutacja jest iloczynem rozłącznych cykli. Każdy cykl jest transpozycją.

Definicja 14.16 (pierścień). Zbiór R nazwiemy pierścieniem jeśli jest grupą abelową ze zdefiniowanym działaniem "dodawania" oraz jeśli zdefiniowane jest inne działanie ("mnożenie") $R \times R \to R$ które jest łączne. Ponadto musi być spełniony warunek $\forall_{r_1, r_2, r_3} \quad r_1(r_2 + r_3) = r_1r_2 + r_1r_3$, oraz $(r_1 + r_2)r_3 = r_1r_3 + r_2r_3$. Jeśli nowo zdefiniowane działanie jest przemienne to pierścień R jest przemienny. Jeśli $\exists_{1 \in R} \forall_{r \in R} \quad 1r = r1 = r$ to R jest pierścieniem z jedynką.

Definicja 14.17 (ciało). Pierścień przemienny z jedynką w którym każdy różny od 0 element jest odwracalny nazywamy ciałem.

Stwierdzenie 14.18. *Niech K będzie dowolnym ciałem skończonym. Wówczas rząd K, który oznaczamy $\#K$ równy jest p^n, gdzie p jest najmniejszą liczbą taką, że $p \cdot 1 = 0$. (Rząd ciała K możemy utożsamiać z mocą zbioru, czyli liczbą elementów K - choć to nieco nieformalne sformuowanie.)*

15 Wykład

15.1 Odwzorowania wieloliniowe

Założenie W poniższych zapisach zakładamy, że V_1, V_2 - przestrzenie liniowe nad ciałem K, skończenie wymiarowe.

Definicja 15.1 (odwzorowanie dwuliniowe). Odwzorowanie $f : V_1 \times V_2 \to K$ nazywamy dwuliniowym jeżeli jest liniowe na każdej składowej produktu kartezjańskiego $V_1 \times V_2$. Innymi słowy: $\forall_{v_1 \in V_1} f(v_1, -) : V_2 \to K$ jest liniowe, oraz $\forall_{v_2 \in V_2} f(-, v_2) : V_1 \to k$ jest liniowe. W skrócie możemy to zapisać (dla pierwszej współrzędnej): $\forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in k} \forall_{v_1', v_2' \in V_1} f(\alpha_1 v_1' + \alpha_2 v_2', V_2) = \alpha_1 f(v_1', V_2) + \alpha_2 f(v_2', V_2)$.

Definicja 15.2 (odwzorowanie wieloliniowe). Odwzorowanie $f : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l \to K$ nazywamy wieloliniowym o ile jest liniowe na każdym składniku. To znaczy:

$$\forall_{(v_1, v_2, \dots, v_l) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_l} \forall_{1 \leqslant i \leqslant l} f(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, -, v_{i+1}, \dots, v_l) : V_i \to K \quad \text{jest liniowe.}$$

Uwaga 15.3. Wprowadzenie pojęcia formy wieloliniowej pozwala "lepiej" zdefiniować wyznacznik macierzy.

Definicja 15.4 (wyznacznik macierzy). Funkcję $d : \mathrm{Mat}_n^n(K) \to K$ nazywamy wyznacznikiem macierzy $n \times n$ o ile:

1. jest ono wieloliniowe na kolumnach,

2. $d(A) = 0$ o ile dwie kolumny są równe,

3. d(I)=1.

Definicja 15.5 (odwzorowanie wieloliniowe alternujące). Odwzorowanie wieloliniowe $f: V^n \to K$ nazywamy alternującym o ile $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ kiedy jakiekolwiek dwa elementy w ciągu wektorów $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ są równe.

Wniosek: Wyznacznik jest odwzorowaniem alternującym.

Stwierdzenie 15.6. *Zamiana miejscami dwóch wektorów powoduje zmianę znaku o (-1) dla odwzorowania alternującego.*

Definicja 15.7. Grupa S_n jest to zbiór wszystkich odwzorowań różnowartościowych zbiorów $\{1, 2, \ldots, n\}$ w siebie. Działanie to składanie odwzorowań. Element neutralny to funkcja identycznościowa. Niech f odwzorowanie alternujące, wtedy:

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \pm f(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}), \quad \gamma \in S_n.$$

Permutacja γ jest parzysta o ile:

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = f(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}), \quad \gamma \in S_n.$$

Permutacja γ jest nieparzysta o ile:

$$f(e_1, e_2, \ldots, e_n) = -f(e_{\gamma_1}, e_{\gamma_2}, \ldots, e_{\gamma_n}), \quad \gamma \in S_n.$$

Uwaga 15.8. Więcej o grupie S_n w przykładzie 14.13.

Stwierdzenie 15.9. *Jeżeli f jest dowolnym odwzorowaniem wieloliniowym alternującym ze zbioru macierzy $(n \times n)$ do K, to:*

$$\forall_{A \in Mat_{n\times n}(K)} \qquad f(A) = f(I)\ det\ (A)$$

Twierdzenie 15.10 (wzór Cauchy'ego). *Dla macierzy: $A, B \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ zachodzi wzór:*

$$det\ AB = \ det\ A\ det\ B.$$

Definicja 15.11 (iloczyn skalarany). Iloczynem skalarny na przestrzeni liniowej V wymiaru n nad ciałem K nazywamy odwzorowanie $V \times V \to K$, które jest dodatnie i symetryczne. Czyli:

- odwzorowanie $\forall_{x,y\in V}(x|y)$ jest dwuliniowe,
- odwzorowanie spełnia: $\forall_{x,y\in V}(x|y) = (y|x)$,
- odwzorowanie spełnia: $\forall_{x\in V}(x|x) \geqslant 0$.

Przykład 15.12. Standardowy iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$, który ma postać $(x|y) = \sum_i x_i y_i$, spełnia powyższą definicję.

Definicja 15.13 (forma kwadratowa). Formą kwadratową na przestrzeni V nazywamy dowolne symetryczne odwzorowanie dwuliniowe z $V^2 \to K$.

16 Wykład

Definicja 16.1 (forma symetryczna). Forma dwuliniowa jest symetryczna o ile:

$$\forall_{x,y\in V} \quad f(x,y) = f(y,x).$$

Definicja 16.2 (forma antysymetryczna). Forma dwuliniowa jest antysymetryczna o ile:

$$\forall_{x,y\in V} \quad f(x,y) = -f(y,x).$$

Definicja 16.3 (forma niezdegenerowana). Forma kwadratowa jest niezdegenerowana o ile wyznacznik jej macierzy jest liczbą różną od zera. W przeciwnym wypadku jest to forma zdegenerowana.

Uwaga 16.4. Iloczynem skalarnym będziemy nazywali formę kwadratową. Symetryczną i niezdegenerowaną.

Możemy rozpatrywać przestrzeń liniową, której elementami są wszystkie formy dwuliniowe $f\colon V \times V \to K$.

Stwierdzenie 16.5. *Przestrzeń form dwuliniowych jest sumą prostą podprzestrzeni form symetrycznych i podprzestrzeni form antysymetrycznych.*

Wniosek: Z powyższego stwierdzenia wynika, że każda forma dwuliniowa jest albo symetrczyna albo antysymetryczna.

17 Wykład

Definicja 17.1 (macierz odwzorowania dwuliniowego). Macierz $[a(e_i, e_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ nazywamy macierzą odwzorowania dwuliniowego $a : V \times V \to K$ w bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Uwaga 17.2. Każda macierz kwadratowa definiuje odwzorowanie dwuliniowe i każde odwzorowanie dwuliniowe definiuje macierz.

Stwierdzenie 17.3. *Jeżeli A jest macierzą odwzorowania dwuliniowego $a : V \times V \to K$ w bazie $e_1, e_2, \ldots, e_n$ i A' jest jego macierzą w bazie $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. P jest macierzą przejścia od bazy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ do bazy $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ to zachodzi związek $A' = PAP^T$.*

Definicja 17.4 (rząd odwzorowania dwuliniowego). Rzędem odwzorowania dwuliniowego nazywamy rząd jego macierzy w dowolnej bazie.

Uwaga 17.5. Zachodzi oczywiście wzór: $\operatorname{rz} A' = \operatorname{rz}(PAP^T)$. Z tego wszystkiego łatwo wywnioskować, że rząd nie zależy od wyboru bazy.

Definicja 17.6 (forma dwuliniowa niezdegenerowana). Forma $a : V \times V \to K$ jest niezdegenerowana, gdy $\operatorname{rz}(A) = \dim V$. Definicja ta jest równoważna definicji podanej wcześniej.

Definicja 17.7 (forma kwadratowa). Formą kwadratową o współczynnikach w ciele K nazywamy każdy wielomian:

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

który jest jednorodny, stopnia drugiego (to znaczy, każdy jednomian ma stopień dwa), z pierścienia wielomianów $K[x_1, \ldots, x_n]$.

Przykład 17.8 (forma kwadratowa). Przykładem formy kwadratowej może być:

$$xy + x^2, x^2, y^2, x^2 + y^2.$$

Definicja 17.9 (funkcja kwadratowa). Funkcją kwadratowa nazywamy każde przekształcenie $g\colon V \to K$ spełniające warunki:

- dla każdego $\alpha \in K, v \in V$ zachodzi $q(\alpha v) = \alpha^2 q(v)$,
- funkcja $\beta\colon V \times V \to K$ określona wzorem: $\beta(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) + q(x) - q(y))$ dla $x, y \in V$ jest formą dwuliniową.

Definicja 17.10 (forma kwadratowa odpowiadająca formie dwuliniowej). Niech $a\colon V \times V \to K$ - odwzorowanie dwuliniowe symetryczne. Funkcję $\overline{a}\colon V \to K$ daną wzorem: $\overline{a}(x) = a(x, x)$ będziemy nazywali formą kwadratowa odpowiadającą formie a.

Uwaga 17.11. Forma a również wyznacza funkcję kwadratową: $a(x,x) = q(x)$ Wtedy: $q(bx) = a(bx,bx) = b^2 a(x,x) = b^2 q(x)$.

Fakt 17.12. Jeżeli wiemy, że dana forma (funkcja) kwadratowa pochodzi od odwzorowania dwuliniowego symetrycznego to, to odwzorowanie wyraża się wzorem

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j.$$

Definicja 17.13 (rząd formy kwadratowej). Rząd formy kwadratowej to rząd jej macierzy.

Definicja 17.14. Postacią kanoniczną formy kwadratowej $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$ jest znalezienie takiej bazy przestrzeni V, że:

$$\forall_{i \neq j} a_{ij} = 0 \qquad f(x) = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2.$$

Twierdzenie 17.15. *Każdą formę kwadratową można sprowadzić do postaci kanonicznej za pomocą niezdegenerowanego przekształcenia liniowego.*

Uwaga 17.16. Jednym ze sposobów sprowadzania formy kwadratowej do postaci kanonicznej jest metoda Lagrange'a, która pojawiał się w dowodzie powyższego twierdzenia.

18 Wykład

18.1 Postać normalna formy kwadratowej

Definicja 18.1 (forma kwadratowa normalna nad $\mathbb{C}$). Formą kwadratową nad przestrzenią zespoloną nazywa się normalną o ile jest postaci kanonicznej i wszystkie współczynniki a_{ii} mają moduł 1.

Definicja 18.2 (forma kwadratowa normlana nad $\mathbb{R}$). Niech forma kwadratowa f będzie określona na przestrzeni rzeczywistej $\mathbb{R}$. Niech $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n$, będzie jakąkolwiek bazą, w której nasza forma ma postać normalną: $f(x) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_r^2$, gdzie $\{y_i\}$ oznaczają współrzędne wektora x w bazie $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n,$.

18.2 Bezwładność form kwadratowych

Definicja 18.3 (indeks dodtni, ujemny i sygnatura formy). Liczbę wyrazów dodatnich (ujemnych) w $f(x) = y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_r^2$ nazywamy dodatnim (ujemnym) indeksem formy f. Różnicę pomiędzy indeksami nazywamy sygnaturą formy.

Twierdzenie 18.4 (prawo bezwładności form kwadratowych). *Indeks dodatni i ujemny są niezależnikami formy kwadratowej, tj. nie zależą od wyboru bazy, w której ma ona postać normalną.*

18.3 Sprowadzenie formy kwadratowej do postaci kanonicznej - Metoda Jacobiego

Niech będzie dana forma kwadratowa $f(x) = a(x,x)$. Niech $a : V \times V \to K$, oraz niech bazą V będą wektory $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Niech forma dwuliniowa a ma macierz symetryczną $A = [a(e_i, e_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$A_1 = a_{11}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ldots, A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}_{1 \leqslant k \leqslant n}.$$

Minory główne (wyznaczniki A_i) oznaczać będziemy przez $\Delta_i = \det A_i$ przy założeniach: $\Delta_0 = 1$ i $\forall_i \Delta_i \neq 0$. Szukamy nowej bazy: $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, w której forma ma postać kanoniczną, co oznacza, że: $\forall_{i \neq j} a(e'_i, e'_j) = 0$. Niech nowa baza będzie postaci:

$$\begin{cases} e'_1 = P_{11}e_1 \\ e'_2 = P_{21}e_1 + P_{22}e_2 \\ \vdots \\ e'_n = P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \cdots + P_{nn}e_n \end{cases}$$

Korzystając z metody indukcji matematycznej oraz założeń otrzymujemy następujący układ równań (z niewiadomymi $P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{kk}$):

$$\begin{cases} P_{k1}a_{11} + P_{k2}a_{12} + \cdots + P_{kk}a_{1k} = 0 \\ P_{k1}a_{21} + P_{k2}a_{22} + \cdots + P_{kk}a_{2k} = 0 \\ \vdots \\ P_{k1}a_{k-1,1} + P_{k2}a_{k-1,2} + \cdots + P_{k,k}a_{k-1,k} = 0 \\ P_{k1}a_{k1} + P_{k2}a_{k2} + \cdots + P_{kk}a_{kk} = 1 \end{cases}$$

Z tego, że $\Delta_k \neq 0$ - wyznacznik główny układu, wynika, że układ ten ma rozwiązanie, które wyznaczamy z wzorów Cramera. Otrzymujemy stąd wzór: $P_{kk} = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}$, który pozwala zapisać nam formę w postaci kanonicznej:

$$f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$$

19 Wykład

Definicja 19.1 (forma kwadratowa określona dodatnio / ujemnie). Forma kwadratowa f jest dodatnio określona jeżeli $\forall_{x \neq 0} f(x) > 0$. Forma kwadratowa f jest ujemnie określona jeżeli $\forall_{x \neq 0} f(x) < 0$.

Twierdzenie 19.2. *Jeżeli f jest dodatnio określona, to $a_{ii} > 0$ dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Przykład 19.3. Powyższe twierdzenie nie daje jednak warunku koniecznego dodatniej określoności formy kwadratowej. Rozważmy bowiem następującą formę $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$f(x) = x_1^2 + 1000x_1x_2 + x_2^2.$$

Spełnia ona warunek twierdzenia: $a_{11} = a_{22} = 1 > 0$. No ale dla $x = (-1, 1)$ mamy: $f(-1, 1) = 1 - 1000 + 1 = -998 < 0$, czyli forma nie jest określona dodatnio.

Twierdzenie 19.4. *Jeżeli f jest dodatnio określona, to wyznacznik jej macierzy jest dodatni.*

Uwaga 19.5. Zauważmy, że forma z poprzedniego przykładu nie spełnia już powyższego twierdzenia.

Wniosek: Na przestrzeni n-wymiarowej każda forma dodatnio określona ma rząd n.

Twierdzenie 19.6 (kryterium Sylwestera). *Na to, by forma kwadratowa była dodatnio określona potrzeba i wystarcza, by wszystkie minory główne jej macierzy były dodatnie.*

20 Wykład

20.1 Macierz odwrotna

Uwaga 20.1. O macierzach odwrotnych była już mowa wcześniej - należy porównać poniższe rozważania z tymi, które były wcześniej.

Definicja 20.2 (macierz odwrotna). Niech A będzie macierzą kwadratową nad ciałem K. Macierz B nazywamy macierza odwrotną do macierzy A o ile $AB = BA = I$ i oznaczamy przez A^{-1}.

Metoda wyliczania macierzy odwrotonej. Aby znaleźć macierz odwrotną B do macierzy A postępujemy w następujący sposób. Jeśli $B = A^{-1}$ to mamy:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć macierz B musimy rozwiązać n następujących układów równań:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

W macierzy po prawej stronie równości 1 występuje zawsze tylko w j-tym wierszu. (j zmienia się od 1 do n, i jest ustalone dla każdego z układów równań, tzn. pierwszy z układów ma j=1, drugi j=2 itd). Każdy z takich układów ma n niewiadomych. Zakładamy $\det A \neq 0$, wtedy mamy wzór $x_{ij} = \frac{(-1)^{i+1} \det (A_{1i})}{\det A}$, gdzie A_{ij} powstaje z A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Stwierdzenie 20.3. *Dla żadnej macierzy kwadratowej nie można znaleźć dwóch różnych macierzy odwrotnych.*

Uwaga 20.4. Innymi słowy, w przypadku gdy $\det A = 0$ macierz odwrotna nie istnieje, w każdym innym, istnieje dokładnie jedna macierz odwrotna do macierzy A.

Definicja 20.5 (wartość własna i wektor własny). Niech $T\colon V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V nad ciałem K o skończonym wymiarze. Wartością własną endomorfizmu nazywamy element $\lambda \in K$ taki, że istnieje wektor $v \in V$, że $T(v) = \lambda v$. Wektor v nazywamy wektorem własnym wartości własnej λ.

Przykład 20.6. Niech $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ endomorfizm dany macierzą $M_T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Z postaci macierzowej łatwo możemy odczytać wzór, który ma postać $T(x_1, x_2) = (x_1+4x_2, x_1+x_2)$. Szukamy wartości własnych λ takich, że $\lambda[x_1, x_2] = [x_1 + 4x_2, x_1 + x_2]$. Rozwiązujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 + x_2 = \lambda x_2 \end{cases}$$

$$(*)\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}$$

Liczymy wyznacznik układu:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Szukamy takich λ dla których ten wyznacznik wynosi zero. Rozwiązujemy więc równanie kwadratowe ze względu na niewiadomą λ. Jego rozwiązania to:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3.$$

Są to szukane wartości własne. Teraz możemy wyliczone wartości λ podstawić do układu równań (*) i uprościć. Dla $\lambda = 3$ otrzymujemy zależność $x_1 = 2x_2$ a dla $\lambda = -1$ mamy $x_1 = -2x_2$. Rysujemy układ współżędnych zależności x_2 od x_1 z dwoma wykresami po jednym dla każdej z wartości własnej. Rysunki te przedstawiają proste - przestrzenie wektorów własnych, dla każdej z własności własnych.

Przykład 20.7. Jeśli T traktujemy jako macierz, to można mówić również o wartości własnej macierzy (a nie endomorfizmu). Niech $T : K^3 \to K^3$ zadane wzorem:

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 5x_3 \end{pmatrix}.$$

Różnicą pomiędzy tym a poprzednim przykładem jest to, że zaczynamy od odwzorowania, a nie od macierzy. Możemy bowiem teraz (mając wzór) podać macierz odwzorowania, która ma postać:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązujemy teraz równanie:

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda) = 0$$

z którego wyliczamy wartości własne: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$.

21 Wykład

Definicja 21.1 (wielomian charakterystyczny endomorfizmu). Wielomianem charakterystycznym endomorfizmu T nazywamy wielomian: $f(\lambda) = \det(T - \lambda I)$, gdzie T jest macierzą endomorfizmu T w danej bazie.

Uwaga 21.2. Zauważmy, że:

- Powyższa definicja nie zależy od wyboru bazy.
- Wartości własne endomorfizmu T odpowiadają pierwiastkom wielomianu charakterystycznego endomorfizmu T.

Definicja 21.3 (podprzestrzeń własna). Niecz λ będzie wartością własną endomorfizmu T skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K. Przestrzenią własną wartości własnej λ nazywamy podprzestrzeń:

$$V_\lambda = \{v \in V | T(v) = \lambda v\}.$$

Uwaga 21.4. Jeśli λ jest wartością własną, to V_λ jest podprzestrzeń liniowa. Spełniony jest warunek: $v_1, v_2 \in V_\lambda \Rightarrow \forall_{\alpha,\beta} \quad \alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda$, ponieważ: $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$.

Definicja 21.5. Krotnością algebraiczną wartości własnej λ nazywamy jej wielokrotność, jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego (oznaczenie $K_a(\lambda)$).

Definicja 21.6. Krotnością geometryczną wartości własnej λ nazywamy $\dim V_\lambda$ (oznaczenie $K_g(\lambda)$).

Stwierdzenie 21.7. *Niech λ będzie wartością własną endomorfizmu T skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej. Wówczas $K_g(\lambda) \leqslant K_a(\lambda)$ (są przypadki kiedy jest to ostra nierówność).*

Twierdzenie 21.8. *Niech V - skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem K. Oraz niech $T\colon V \to V$ endomorfizm, który posiada różne wartości własne: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Wtedy zachodzi:*

1. *Elementy $v_1 \in V_{\lambda_1}, v_2 \in V_{\lambda_2}, \ldots, v_n \in V_{\lambda_n}$ są liniowo niezależne.*
2. $\forall_{1 \leqslant i \leqslant n} \quad V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j} = 0.$

22 Wykład

Twierdzenie 22.1. *Niech $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ będzie macierzą, której wielomian charakterystyczny rozkłada się na czynniki liniowe:*

$$f_k(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n)$$

Wtedy istnieje taka macierz odwracalna $P \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$, że:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Lemat 22.2 *(tw. Steinza o wymianie).* Niech $\dim {}_K V = n$ oraz niech $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ będzie układem r liniowo niezależnych elementów. (Zakładamy $r < n$ - w przeciwnym wypadku twierdzenie nie ma sensu.) Niech układ elementów $(w_t)_{t \in T}$ będzie zbiorem generatorw przestrzeni V. Oznacza to, że każdy element $v \in V$ jest skończoną kombinacją liniową elementów $(w_t)_{t \in T}$. Wtedy istnieje $n - r$ elementów: $w_{t_1}, w_{t_2}, \dots, w_{t_{n-r}}$ takich, że układ: $(v_1, v_2, \dots, v_r, w_{t_1}, w_{t_2}, \dots, w_{t_{n-r}})$ jest bazą V.

23 Wykład

Definicja 23.1. Niech dana będzie macierz $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$. Mówimy, że A da się sprowadzić do postaci diagonalnej jeśli istnieje $B \in \mathrm{GL}_n(k)$ (macierze odwracalne $n \times n$), takie, że $B^{-1}AB$ jest macierzą diagonalną.

Twierdzenie 23.2. *Załóżmy, że przekształcenie liniowe $T : V \to V$ ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ gdzie $n =$ $\dim {}_K V$.*

(1) Niech $v_i \in V_{\lambda_i}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas układ elementów $v_1, v_2, \dots, v_n$ jest bazą przestrzeni V.

(2) $\forall_{i=1,2,\dots,n}$ $\dim {}_K V_{\lambda_i} = 1$, oraz $V = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_n}$.

(3) Macierz przekształcenia T w bazie z punktu (1) jest diagonalna:

$$A_T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Wniosek: Niech $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ i niech A ma n różnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Załóżmy, że dane są wektory własne $v_1, v_2, \dots, v_n \in K^n$ macierzy A takie, że $Av_i = \lambda_i v_i$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wtedy:

(1) $v_1, v_2, \dots, v_n$ - baza K^n.

(2) Niech $B = [v_1|v_2| \dots |v_n] \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ oznacza macierz utworzoną przez współrzędne wektorów $v_1, v_2, \dots, v_n$ wtedy:

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

W szczególności macierz A da się sprowadzic do postaci diagonalnej.

24 Wykład

Twierdzenie 24.1. *Macierz $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ można sprowadzić do postaci diagonalnej wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące dwa warunki:*

(1) wielomian charakterystyczny $f_A(t) = \det\,(A - tI_n)$ rozkłada się na iloczyn czynników liniowych.

(2) dla każdej wartości własnej $\lambda \in K$ macierzy A zachodzi równość $k_g(\lambda) = k_a(\lambda)$

Lemat 24.2. Niech $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in K$ - różne skalary, $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K), B \in \mathrm{GL}_n(K)$ zakładamy, że

$$B^{-1}AB = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{k_1}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{k_2}, \ldots, \underbrace{\lambda_m, \ldots, \lambda_m}_{k_m},), \quad n = \sum_{i=1}^{m} k_i.$$

Wtedy:

(1) $\forall_{i=1,2,\ldots,m}$ dim ker $(A - \lambda_i I_n) =$ dim ker $(B^{-1}AB - \lambda_i I_n) = k_i$.

(2) $K^n = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m}$.

Uwaga 24.3. Z punktu (2) mamy, że $\dim V_{\lambda_i} = k_i \; i = 1, 2, \ldots, n$. Dla każdego $i \leqslant m$ istnieje baza S_i przestrzeni V_{λ_i} składająca się z k_i elementów. Rozważmy przekształcenie liniowe $T_a \colon K^n \to k^n \quad T_a(v) = Av, \quad v \in k^n$ zbiór wektorów $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$, z twierdzenia 23.2(2) stanowi bazę całej przestrzeni K^n. Ponieważ ta baza składa się z wektorów własnych wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ więc w tej bazie odwzorowanie T_A ma postać diagonalną. Podsumowując, przy oznaczeniu B macierzy przejści od bazy standardowej (bazy w której wyraża się macierz A) do bazy S otrzymujemy, że macierz $B^{-1}AB$ ma postać diagonalną.

Wniosek: Dla macierzy $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K)$ następujące warunki są równoważne.

(1) A ma n różnych wartości własnych w ciele K.

(2) Macierz A da się sprowadzić do postaci diagonalnej, oraz krotność krotność geometryczna każdej wartości własnej macierzy A jest równa 1 $\dim V_{\lambda_i} = 1$.

(3) $f_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(A_i - t)$ dla różnych skalarów $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$.

Wniosek: Każda macierz zespolona kwadratowa, której wielomian charakterystyczny ma pierwiastki jednokrotne da się sprowadzić do postaci diagonalnej.

24.1 Przestrzenie euklidesowe

Uwaga 24.4. Część z definiowanych tutaj pojęć była już zdefiniowana wcześniej - należy porównać te definicje.

Definicja 24.5 (iloczyn skalarny i przestrzeń Euklidesowa). Niech V - skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem liczb rzeczywistych, oraz niech $\beta : V \times V \to \mathbb{R}$ jest formą dwuliniową symetryczną dodatnią, to znaczy $\forall_{v \in V} \; \beta(v, v) \geqslant 0$, oraz $\beta(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Wówczas formę β nazywamy iloczynem skalarnym, a parę (V, β) przestrzenią Euklidesowa.

Definicja 24.6 (metryka). Niech X - dowolny zbiór. Metryką (odległością) na zbiorze X nazywamy funkcję $d \colon X \times X \to \mathbb{R} \geqslant 0$ spełniającą warunki:

(1) $\forall_{x,y} \; d(x, y) = d(y, x)$ symetryczność,

(2) $\forall_{x,y,z} \; d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ nierówność trójkąta,

(3) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ odległość od x do y.

Definicja 24.7 (przestrzeń metryczna). Parę (X, d), nazywamy przestrzenią metryczną (d-metryka na zbiorze X).

Uwaga 24.8. Często stosuje się też pojęcie przestrzeni unormowanej. Jest to przestrzeń w której zdefiniowano normę. W materiale tego opracowania nie mieści się jednak dokładna definicja normy. Zazwyczaj przyjmować będziemy normę daną wzorem $\|v\| = \sqrt{< v, v >}$.

Przykład 24.9 (przestrzenie metryczne). Poniżej zestawiono kilka prostych przykładów przestrzeni metrycznych.

1. Liczby rzeczywiste z wartością bezwzględną: $(\mathbb{R}, |\ |)$. Spełnione są warunki definicji metryki: $|x - y| = |y - x|$, $|x - y| \leqslant |x - z| + |z - y|$, $|x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. Dowolna przestrzeń euklidesowa (V, β) z normą: $\|x\| = \sqrt{\beta(x, x)}$, $d(x, y) = \|x - y\|$.
3. Dowolna przestrzeń z metryką dyskretną: $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$.

Lemat 24.10 *(nierówność Schwarza).* Niech (V, β) - dowolna przestrzeń euklidesowa. Wtedy:

$$| < x, y > | \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Stwierdzenie 24.11. *Niech $(V, <,>)$ - dowolna przestrzeń euklidesowa. Wtedy:*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(3) $| < x, y > | \leqslant \|x\| \|y\|$

(4) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

25 Wykład

Definicja 25.1 (układ elementów ortonormalnych). Układ elementów $v_1, v_2, \ldots, v_n$ nazwiemy ortonormalnym, jeśli spełniony jest warunek:

$$< v_i, v_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Wyrażenie δ_{ij} nazywa się deltą Diraca.

Uwaga 25.2 (baza ortonormalna). Mając definicję układu ortonormalnego, łatwo zdefiniować pojęcie bazy ortonormalnej.

Twierdzenie 25.3. *Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych, będącą jednocześnie przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym $<,>$. Istnieje wówczas algorytm (ortogonalizacja Gramma-Schmidta) pozwalający zamienić dowolną bazę (w_1, w_2, ..., w_n) w bazę ortogonalną.*

Definicja 25.4 (macierz ortogonalna). Macierz kwadratową o współczynnikach rzeczywistych spełniejącą warunek $AA^T = I$ nazywamy macierzą ortogonalną.

Stwierdzenie 25.5. *A-macierz ortogonalna, B-macierz ortogonalna tego samego stopnia n. Wówczas AB i BA macierz ortogonalna.*

Definicja 25.6 (grupa macierzy ortogonalnych). Zbiór macierzy ortogonalnych stopnia n nazywamy grupą macierzy ortogonalnych i oznaczamy przez $O(n)$

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) | AA^T = I_n\}$$

Stwierdzenie 25.7. *Zbiór macierzy odwracalnych $B(n)$ (tzn. należących do $GL(n, \mathbb{R})$) spełniających warunek $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \forall_{A \in B(n)} \quad < x, y >=< Ax, Ay >$ jest dokładnie zbiorem macierzy ortogonalnych $(B(n) = O(n))$.*

26 Wykład

Twierdzenie 26.1. *Niech będzie dana macierz $A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) = M(n, R)$. Następujące warunki są równoważne:*

(1) $A \in O(n)$ *(macierze ortogonalne),*

(2) $< Ae_i, Ae_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$

(3) Jeżeli układ wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to układ wektorów $(T_A(v_1), T_A(v_2), \ldots, T_A(v_n))$ jest bazą ortogonalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $\quad T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T_a(v) = Av$

(4) Wiersze macierzy A są bazą ortonormalną $\mathbb{R}^n$,

(5) Kolumny macierzy A są bazą ortonormalną $\mathbb{R}^n$.

26.1 Formy hermitowskie

Definicja 26.2. Niech V-przestrzeń liniowa wymiaru n nad ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}^n$. Forma $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ jest formą hermitowską, jeśli spełnia:

(1) $\forall_{v_1, v_2 \in V} \beta(v_1, v_2) = \overline{\beta(v_1, v_2)}$

(2) $\forall_{v_1, v_2, v_3 \in V} \beta(v_1, v_2, v_3) = \beta(v_1, v_3) + \beta(v_2, v_3)$

(3) $\forall_{v_1, v_2, v_3 \in V} \beta(v_1, v_2, v_3) = \beta(v_1, v_2) + \beta(v_1, v_3)$

(4) $\forall_{v \in V} \beta(v, v) \geqslant 0$

(5) $\beta(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Definicja 26.3 (iloczyn skalarany hermitowski). Formę hermitowską $\beta \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ daną wzorem: $\beta(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$, będziemy nazywać iloczynem skalarnym hermitowskim.

Definicja 26.4 (norma hermitowska). Normę indukową przez iloczyn skalarny hermitowski β z poprzedniej definicji, będziemy nazywać normą hermitowską. Dla dowolnego $v \in \mathbb{C}^n$ normę oznaczamy $\|v\|$. Przyjmuje ona wartość:

$$\|v\| = \sqrt{\beta(v, v)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i \overline{v}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}.$$

Definicja 26.5. Niech $\dim_{\mathbb{C}} V = n,$, $\beta \colon V \times V \to \mathbb{C}$ będzie formą hermitowską. Układ wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ nazywamy układem ortonormalnym (ze względu na formę hermitowską β), jeśli:

$$\forall_{i,j} \quad \beta(v_i, v_j) = 0 \text{ ,gdy } i \neq j$$

$$\forall_i \quad \sqrt{\beta(v_i, v_i)} = \|v_i\| = 1$$

$$\forall_{v,w \in V} \quad \varphi(v, w) = \|v - w\|,$$

gdzie φ to metryka indukowana przez normę $\| \ \|$ na przestrzeni V.

Definicja 26.6 (grupa macierzy unitarnych). Zbiór macierzy unitarnych stopnia n to zbiór:

$$U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) | A\overline{A}^T = I_n\}.$$

Twierdzenie 26.7. *Niech dana będzie macierz $A \in M(n, \mathbb{C}) = M_{\mathbb{C}}(n, n) = M_{n,n}(\mathbb{C})$ Wówczas następujące warunki sa równoważne:*

(1) $A \in U(n)$

(2) $\beta(Ae_i, Ae_j) = \delta_{ij}$ *(gdzie* $\beta((x_i)(y_j)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i\overline{y_j}$*)*

(3) *Jeżeli układ wektorów* $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *jest bazą ortonormalną w* $\mathbb{C}^n$ *to układ wektorów:* $(T_A(v_1), T_A(v_2), \ldots, T_A(v_n))$ *jest także bazą ortonormalną.*

(4) *wiersze macierzy A dają układ ortonormalny w* $\mathbb{C}^n$

(5) *kolumny macierzy A dają układ ortonormalny w* $\mathbb{C}^n$

Stwierdzenie 26.8. *(1) Jeżeli* $A \in O(n)$ *i* λ *jest wartością własną macierzy A to* $|\lambda| = 1$

(2) Jeżeli $A \in U(n)$ *i* $\lambda \in \mathbb{C}$ *jest wartością własną macierzy A to* $|\lambda| = 1$

Twierdzenie 26.9. *Niech V - skończenie wymiarowa przestrzeń liniowa nad ciałem zespolonym, oraz niech* $\beta : V \times V \to \mathbb{C}$ *forma hermitowska. Niech będzie dany (endomorfizm) homomorfizm* $T : V \to V$*, który zachowuje formę* β. $\beta(v, w) = \beta(T(v), T(w))$. *Wtedy istnieje baza ortonormalna* $S = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *przestrzeni V dla której macierz T w bazie S jest diagonalna.*

27 Wykład

Twierdzenie 27.1. *Niech* $A \in U(n)$ *będzie dowolną macierzą unitarną.*

$$U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) | A\overline{A}^T = I\}$$

Wtedy istnieje, taka macierz unitarna $P \in U(n)$*, że*

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{gdzie } |\lambda_i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Twierdzenie 27.2. $A \in O(n)$ *Istnieje macierz ortogonalna* $P \in O(n)$*, że macierz* $P^{-1}AP$ *ma postać:*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_s & & & \\ & & \begin{bmatrix} cos\alpha_1 & -sin\alpha_1 \\ sin\alpha_1 & cos\alpha_1 \end{bmatrix} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \begin{bmatrix} cos\alpha_t & -sin\alpha_t \\ sin\alpha_t & cos\alpha_t \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$