

Zagadnienia z algebry - ćwiczenia

Witold Bołt

11 czerwca 2004 roku

1 Wstęp

Przed każdym kolokwium z algebry wypisywałem sobie rzeczy które powinienem umieć - nie wiem czy udało mi się zawrzeć tutaj całą wiedzę jaka była, ale myślę, że najważniejsze rzeczy są. Także jak ktoś umie większość tego co tu jest, to już jest raczej dobrze.

2 Semestr II

2.1 Kolokwium I

Tu niestety mam nieco cząstkowe notatki, więc pewnie dopisze coś więcej później.

1. Czy dane przekształcenie jest liniowe.
2. Zapisz przekształcenie w nowej bazie.
3. Rozwiąż układ równań.
4. Zbadaj wymiar jądra / obrazu przekształcenia.
5. Czy przekształcenie jest izomorficzne?
6. Wyznaczyć wymiar przestrzeni, sumy prostej przestrzeni, części wspólnej...
7. Układy równań modulo p .
8. Układy równań z parametrem (kiedy jest nieskończenie wiele rozwiązań, kiedy jest jedno, kiedy nie ma wcale)?
9. Kiedy układ wektorów jest niezależny liniowo - w zależności o parametru.

2.2 Kolokwium II

1. Sprawdź czy forma jest dwuliniowa.
2. Napisz macierz formy.
3. Napisz macierz formy w innej bazie (zamiana bazy).
4. Napisać macierz złożenia formy z przekształceniem liniowym - na przykład: $f(\phi(x), \psi(y))$.
5. Sprowadzić formę do postaci kanonicznej metodą Lagrange'a lub Jacobiego.
6. Czy dane przekształcenie może mieć daną macierz w jakiejś bazie?
7. Znaleźć wartości i wektory własne przekształcenia liniowego.
8. Znaleźć przestrzenie niezmiennicze względem ϕ .
9. Udowodnić że dana przestrzeń jest niezmiennicza.
10. Czy forma jest dodatni / ujemnie określona?
11. Czy dwie formy są równoważne?
12. Oblicz wartość formy korzystając z postaci macierzowych (mnożenie macierzy).

2.3 Kolokwium III

1. Napisz równanie prostej (płaszczyzny) równoległej (prostopadłej) do wektora (bądź prostej lub płaszczyzny) i/lub przechodzącej przez dany punkt (punkty).
2. Sprawdź czy punkty są współliniowe, czy należą do jednej płaszczyzny.
3. Obliczyć objętość figury ograniczonej płaszczyzną i osiami układu współrzędnych.
4. Zbadać wzajemne położenie prostych / płaszczyzn.
5. Obliczyć odległość punktu od prostej.
6. Skonstruować bazę ortogonalną przestrzeni liniowej.
7. Wyznaczyć bazę dopełnienia ortogonalnego.
8. Wykazać, że dana forma jest iloczynem skalarnym.
9. Udowodnić tw. Pitagorasa.
10. Znaleźć rzut wektora na podprzestrzeń.
11. Wykazać, że dane przekształcenie jest ortogonalne.
12. Wykazać, że jeśli $A \cdot A^T$ to $\det A = \pm 1$. (albo na odwrót)

13. Wykazać, że dowolne przekształcenie ortogonalne właściwe (niewłaściwe) to obrót (symetria).
14. Wykazać: $\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi(y) \rangle$, gdzie ϕ dane jest macierzą $M_\phi = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ w bazie ortonormalnej.
15. Narysuj zbiór spełniający równanie. Sprowadź równanie do postaci kanonicznej przez obrót i translacje.