

Matematyka

Matura próbna: poziom rozszerzony

29 kwietnia 2006

Poniżej znajduje się **9 zadań**. Rozwiązania należy zapisać na kartach **podpisanych** imieniem i nazwiskiem oraz ewentualnie adresem e-mail. Wyniki będzie można poznać na wszystkich zajęciach w Oratorium począwszy od 4 maja (prowadzący będą mieli teczkę z pracami). Jeśli ktoś poda adres e-mail to (być może) wyślemy mu wyniki wcześniej. Poprawne rozwiązania powinny pojawić się niebawem na stronie <http://www.salezjanie.rumia.pl/math>.

Zajęcia w Oratorium w weekend majowy (1-3 maja) **nie odbywają się**. Do matury zajęcia odbywać się będą jeszcze w dniach: 4, 5, 8, 9 maja w godzinach 17.30-19.00 oraz 6 maja w godzinach 12.00-13.30. Jeśli masz jakieś pytania, nie wyjaśnione zadania czy wątpliwości, a nie możesz przyjść w tych terminach, pisz: ja@hope.art.pl.

Czas pracy: ok. 120 minut.

POWODZENIA!

Zadanie 1 (4 punkty). Niech $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$.

a) Naskicuj wykres f .

b) Rozwiąż równanie $f(x) = 1$.

Zadanie 2 (5 punktów). Sześcian o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem $\frac{\pi}{3}$. Sporządź odpowiedni rysunek. Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 3 (10 punktów). Dane jest równanie: $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$. Zbadaj dla jakich wartości parametru m stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.

Zadanie 4 (4 punkty). Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} |x| - y = 1 \\ x^2 + (y + 1)^2 = 8 \end{cases}$$

Zadanie 5 (4 punkty). Dany jest ciąg trójkątów równobocznych takich, że bok następnego trójkąta jest wysokością poprzedniego. Oblicz sumę pól wszystkich tak utworzonych trójkątów, przyjmując, że bok pierwszego trójkąta ma długość a ($a > 0$).

Zadanie 6 (4 punkty). Ciąg (a_n) określony jest rekurencyjnie w sposób:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Wykaż, korzystając z zasady indukcji matematycznej, że ciąg (a_n) można określić za pomocą wzoru ogólnego $a_n = \frac{2}{2n-1}$, gdzie $n \geq 1$.

Zadanie 7 (5 punktów). Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \log_x(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)$.

Zadanie 8 (9 punktów). Dana jest funkcja $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ oraz prosta l nachylona do osi OX pod kątem α , którego sinus jest równy 0,6.

- a) Oblicz współczynnik kierunkowy prostej l .
- b) Podaj wszystkie punkty x z dziedziny funkcji f , takie, że styczne do wykresu f w punktach $(x, f(x))$ są równoległe do prostej l .

Zadanie 9 (3 punkty). Prawdopodobieństwa zdarzeń losowych A i B są równe: $P(A) = 0,8$ oraz $P(B) = 0,5$. Uzasadnij, że prawdopodobieństwo warunkowe $P(A|B)$ jest nie mniejsze niż 0,6.