Zajęcia nr. 5:
Funkcja liniowa

6 maja 2005

1 Pojęcia podstawowe.

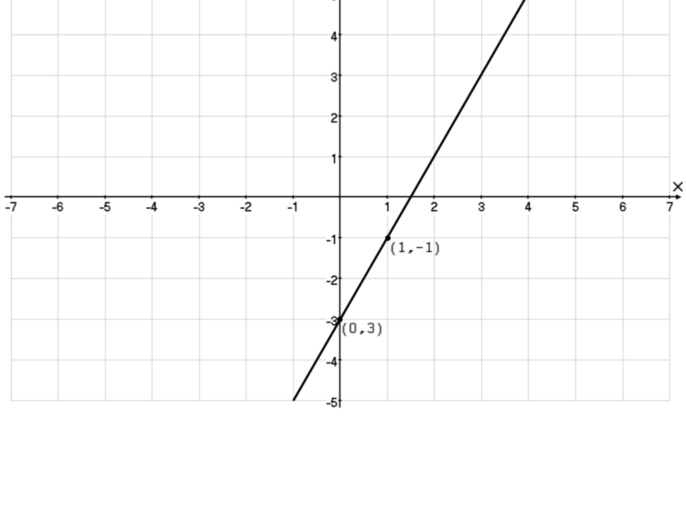
Definicja 1.1 (funkcja liniowa)**.** Niech a i b będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem: $f(x) = ax + b$ nazywamy liniową.

Uwaga 1.2. W definicji funkcji liniowej ważne jest to, że dziedziną tej funkcji jest cały zbiór liczb rzeczywistych (zwróć uwagę na zapis $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, czy wiesz co on oznacza?). Na przykład funkcja dana wzorem: $f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$, choć daje się sprowadzić do wzoru funkcji liniowej $f(x) = x + 2$, to jednak nie jest funkcją liniową gdyż jej dziedziną jest $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Z drugiej strony, jeśli podany jest jedynie wzór funkcji, to przyjmujemy, że jej dziedziną jest tzw. dziedzina naturalna, czyli zbiór tych wszystkich liczb rzeczywistych, dla których ten wzór ma sens.

2 Wykres funkcji liniowej.

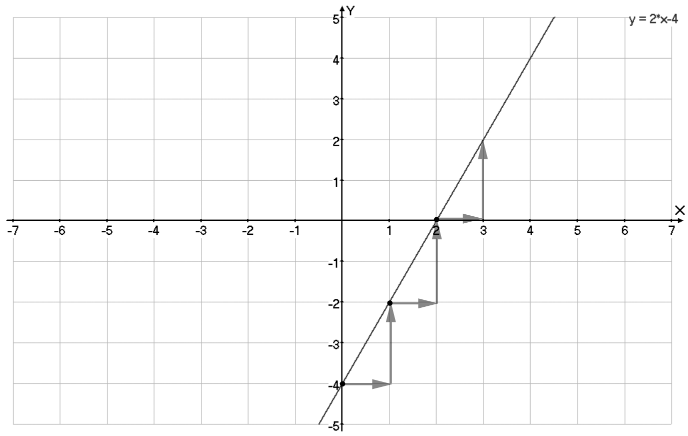
Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest linia prosta o równaniu $y = ax + b$. Aby narysować wykres funkcji $f(x) = ax + b$ wystarczy znaleźć conajmniej dwa dowolne punkty tego wykresu.

Przykład 2.1. Niech dana będzie funkcji liniowa $f(x) = 2x - 3$. Narysujemy teraz jej wykres. Wybierzmy dwa punkty należące do wykresu. Dla $x = 0$, mamy $f(0) = -3$, stąd pierwszym punktem jest $(0, -3)$, natomiast dla $x = 1$, otrzymujemy $f(1) = -1$, czyli drugim punktem będzie $(1, -1)$. Oba punkty zaznaczamy w układzie współrzędnych i prowadzimy prostą która przez te punkty przechodzi. W ten sposób otrzymamy wykres funkcji liniowej $f(x) = 2x - 3$.



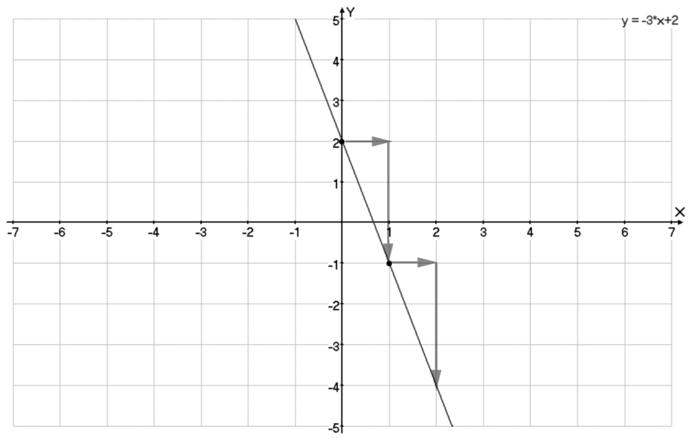
Innym sposobem rysowania wykresu zadanej funkcji liniowej jest tzw. „szybki wykres" stosowany szczególnie wtedy, gdy parametry a i b są całkowite. Wystarczy zdać sobie sprawę, że parametr b określa, w którym miejscu wykres przecina oś OY (bo $f(0) = b$), natomiast parametr a mówi nam o ile wzrasta (lub maleje) wartość funkcji, gdy argument x zwiększamy o 1.

Przykład 2.2 (szybki wykres)**.** Aby zatem narysować wykres funkcji $f(x) = 2x - 4$ zaznaczamy na osi OY punkt -4 (bo $b = -4$). Od narysowanego punktu idziemy jedną kratkę w prawo i dwie kratki do góry (bo $a = 2$) i zaznaczamy kolejny punkt. Od zaznaczonego punktu znów poruszamy się o jedną kratkę w prawo i dwie do góry i otrzymujemy kolejne punkty.



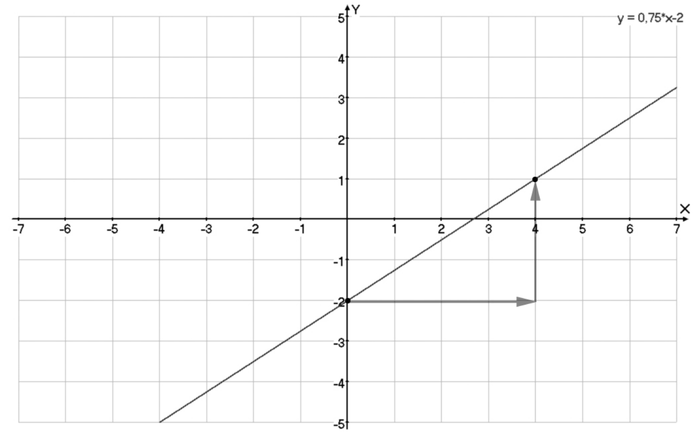
Łącząc otrzymane punkty otrzymujemy prostą która jest wykresem naszej funkcji f.

Przykład 2.3 (szybki wykres)**.** Jeśli parametr a jest ujemny, to wraz ze wzrostem argumentu x, wartość funkcji będzie malała. Zatem rysując wykres np. $f(x) = -3x + 2$ zaznaczamy na osi OY punkt 2 (bo $b = 2$) i poruszamy się o jedną kratkę w prawo i o trzy kratki w dół (bo $a = -3$) otrzymując nowy punkt. Powtarzając procedurę otrzymujemy kolejne punkty:



Uwaga 2.4. Zauważ, że używając metody szybkiego wykresu otrzymujemy dokładniejszy rysunek, gdyż dostajemy wiele punktów, co nie pozwala na „rozchwianie" się rysowanej prostej.

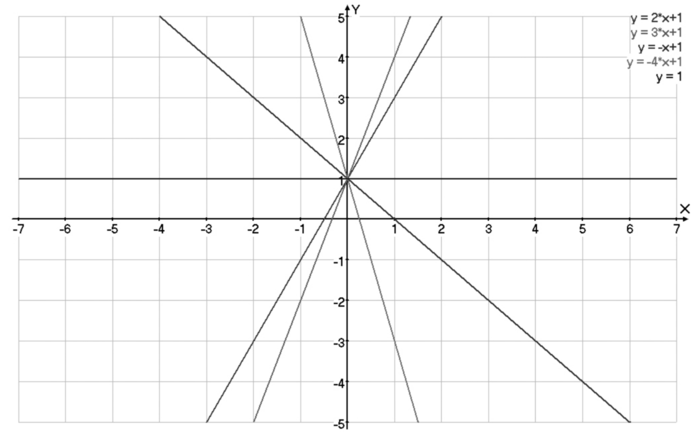
Problem 2.1. Zauważmy, że jeśli paramter a nie jest liczbą całkowitą, to szkicowanie wykresu metodą „szybkiego wykresu" nie jest już takie proste. Na przykład jeśli $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$, to na osi OY zaznaczamy -2, a następnie powinniśmy przenieść się o jedną kratkę w prawo i $\frac{3}{4}$ kratki w górę. Jest to dość trudne do wykonania chyba, że ... zauważmy, iż otrzymamy tą samą prostą poruszając się 4 kratki w prawo i 3 kratki do góry:



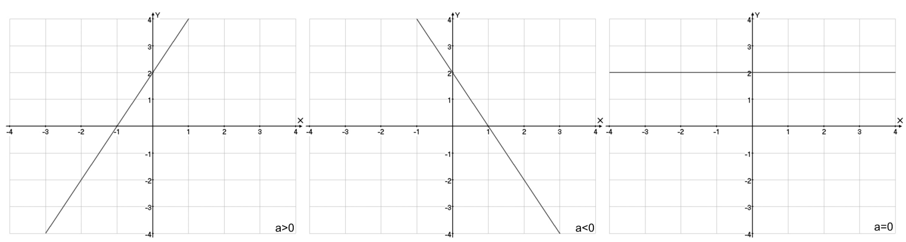
3 Współczynnik kierunkowy.

Definicja 3.1 (współczynnik kierunkowy)**.** Parametr a we wzorze funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ nosi nazwę współczynnika kierunkowego.

Po wcześniejszych rozważaniach dotyczących szkicowania wykresów funkcji liniowych nazwa ta nikogo nie dziwi. Rzeczywiście, to parametr a decyduje o tym, czy wykres opada czy wznosi się i czy jest bardziej stromy czy raczej niewiele odbiega od prostej poziomej. Jeśli w jednym układzie współrzędnych umieścimy wykresy funkcji: $f_1(x) = 2x + 1$, $f_2(x) = 3x + 1$, $f_3(x) = -x + 1$, $f_4(x) = -4x + 1$, $f_5(x) = 1$, to zobaczymy, żę choć wszystkie przechodzą przez punkt $(0, 1)$, to jednak „rozbiegają się” w różnych kierunkach.



Fakt 3.2 (monotoniczność funkcji liniowej)**.** *Każda funkcjia liniowa jest monotoniczna, a rodzaj jej monotoniczności zależy od jej współczynnika kierunkowego.*

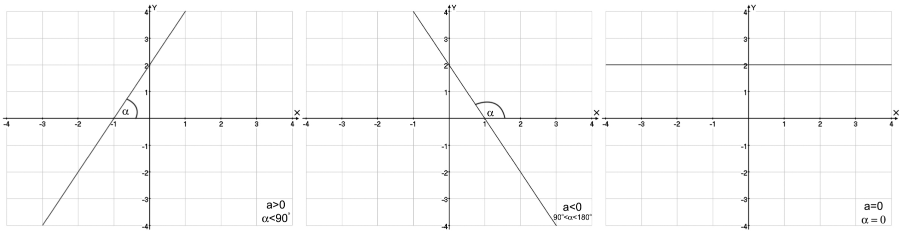


Fakt 3.3. *Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest różny od zera (tzn. $a \neq 0$) to funkcja ta jest różnowartościowa, posiada funkcję odwrotną (która jest funkcją liniową), jej zbiorem wartości jest cały zbiór liczb rzeczywistych i ma dokładnie jedno miejsce zerowe.*

Fakt 3.4. *Jeśli współczynnik kierunkowy funkcji liniowej jest równy zero, tzn. $f(x) = b$, to funkcja ta nie jest różnowartościowa, nie ma funkcji odwrotnej, jej zbiór wartości jest postaci $\{b\}$, a wykresem jest prosta pozioma (równoległa do osi OX). Jeśli więc $b \neq 0$, to funkcja nie posiada miejsc zerowych, a jeśli $b = 0$, to funkcja ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.*

Wniosek. Z podanych wyżej faktów wynika, że funkcja liniowa może mieć jedno miejsce zerowe (gdy $a \neq 0$), może nie mieć miejsca zerowego (gdy $a = 0$ oraz $b \neq 0$) lub może mieć nieskończenie wiele miejsc zerowych (gdy $a = b = 0$).

Fakt 3.5 (kąt nachylenia prostej)**.** *Współczynnik kierunkowy funkcji liniowej f jest równy tangensowi kąta nachylenia wykresu tej funkcji do osi OX (dokładniej mówiąc, do prawej strony tej osi).*

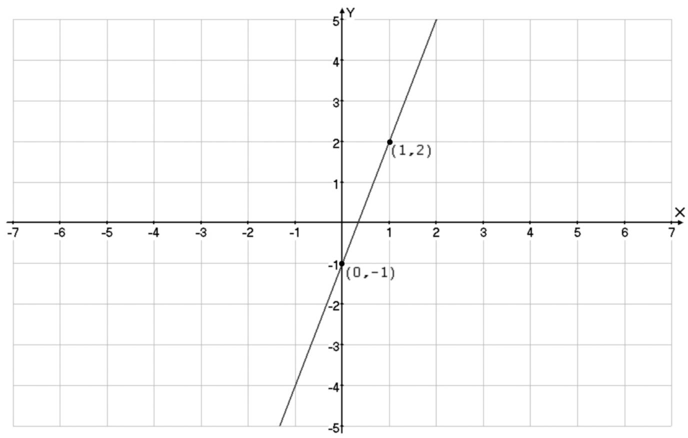


Fakt 3.6 (proste równoległe)**.** *Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2$.*

Fakt 3.7 (proste prostopadłe)**.** *Dwie proste o równaniach $y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 * a_2 = -1$.*

Wykresem każdej funkcji liniowej jest linia prosta. Jednak nie każda linia prosta jest wykresem funkcji liniowej. W szczególności wszystkie proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$, nie są wykresami funkcji. Każda z pozostałych prostych jest wykresem jakiejś funkcji liniowej.

Przykład 3.8. Znajdziemy teraz wzór funkcji, której wykres jest prostą przedstawioną na rysunku:



Ponieważ wykresem jest linia prosta, która nie jest pionowa, zatem szukana funkcja jest liniowa i ma postać $f(x) = ax - 1$ (skąd wiadomo, że $b = -1$?). Ponieważ wykres przechodzi przez punkt $(1, 2)$, zatem $f(1) = 2$, czyli $a - 1 = 2$, co daje $a = 3$. Ostatecznie szukana postać funkcji to $f(x) = 3x - 1$.

4 Zadania

Zadanie 1. Która z podanych funkcji jest funkcją liniową?

a) $f(x) = 3 - 4x$,

b) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x-2)}{x^2+1}$,

c) $f(x) = g(\frac{1}{x})$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+x-2}$.

Zadanie 2 ($\star$)**.** Podaj algorytm „szybkiego rysowania” wykresów funkcji postaci $f(x) = \frac{n}{k}x + b$, gdzie n, k, b są liczbami całkowitymi.

Zadanie 3 ($\star$)**.** Dlaczego proste o równaniach $x = c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ nie są wykresami funkcji?

Zadanie 4. Znjadź wzór funkcji odwrotnej do podanej i obie funkcje narysuj na jednym wykresie.

a) $f(x) = 3x - 1$,

b) $f(x) = -2x + 1$,

c) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$.

Zadanie 5. Narysuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$,

b) $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1}$,

c) $f(x) = g(\frac{1}{x})$, gdzie $g(x) = \frac{1}{x}$,

d) $f(x) = 2x + 1$, dla $x \geqslant 0$.

Zadanie 6. Jeśli funkcja f jest dana wzorem funkcji liniowej, ale jej dziedziną nie jest cały zbiór liczb rzeczywistych, to co można powiedzieć o jej wykresie?

Zadanie 7. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = ax + 1$, gdzie $a \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od parametru a?

Zadanie 8. Przez które z ćwiartek układu współrzędnych przechodzi wykres funkcji $f(x) = 2x + b$, gdzie $b \in \mathbb{R}$? Czy zależy to od paramteru b?

Zadanie 9 ($*$)**.** W zależności od paramterów wartości współczynnika kierunkowego i wyrazu wolnego omów:

a) monotoniczność,

b) parzystość,

c) różnowartościowość,

d) postać zbioru wartości,

funkcji liniowej.

Zadanie 10. Ile miejsc zerowych może mieć funkcja liniowa? Podaj przykład na każdą z możliwości. Jak myślisz jaki będzie to miało wpływ na liczbę rozwiązan równania liniowego.

Zadanie 11. Używając tablic matematycznych, kalkulatora albo komputera, podaj dokładną (lub przybliżoną) wartość kąta nachylenia podanych prostych do osi OX:

a) $f(x) = 2x + 1$,

b) $f(x) = -x + 3$,

c) $f(x) = x - 2$,

d) $f(x) = -3x - 2$,

e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$,

f) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

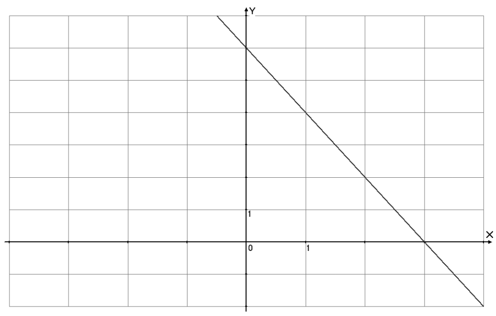
Zadanie 12. Wyznacz wzór funkcji liniowej której wykres:

a) przechodzi przez punkty: $A = (1, -1)$, $B = (5, 4)$,

b) przechodzi przez punkt: $A = (1, 1)$ i jest równoległy do wykresu funkcji $f(x) = 3x - 10$,

c) przechodzi przez punkt: $A = (2, 1)$ i jest prostopodały do wykresu funkcji $f(x) = 2x - 4$.

Zadanie 13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej.



a) Wyznacz wzór tej funkcji.

b) Sprawdź czy dla argumentu $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ wartość funkcji jest równa $4 - 2\sqrt{2}$.

Zadanie 14. Funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = (2m + 1)x - 1$. Dla jakich wartości parametru m:

a) funkcja f jest malejąca,

b) wykres funkcji f jest nachylony do osi OX pod kątem $45°$,

c) funkja przyjmuje wartości dodatnie **t**ylko dla argumentów $x > 2$.

Zadanie 15. Funkcja liniowa jest określona wzorem $f(x) = (-m + 2)x - 3m$. Dla jakich wartości parametru m:

a) funkcja f jest rosnąca,

b) wykres funkcji f jest nachylony do osi OX pod kątem $135°$,

c) funkcja f przyjmuje wartości ujemne **t**ylko dla argumentów $x > 1$,

d) funkcja f jest nieparzysta,

e) funkcja f nie posiada funkcji odwrotnej,

f) wykres funkcji f jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = x + 5$,

g) wykres funkcji f jest równoległy do wykresu funkcji $g(x) = 4x - 4$.

h) wykres funkcji f przechodzi przez punkt: $A = (3, 6)$.